E.N.T.P.E
Département Mathématiques, Informatique et Physique

Cours de Mécanique des Milieux Continus (1$^{\text{ère}}$ année)
Devoir de rattrapage
Durée 2 heures

Mardi 5 Septembre 2000

Problème 1 (10 points) : On étudie, dans le demi-espace $x_2 > 0$ d'un repère orthonormé direct $R = (O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, des écoulements plans d'un fluide visqueux newtonien incompressible de masse volumique ρ et de viscosité dynamique η. On utilisera, dans tout le problème, le système de coordonnées cartésiennes (x_1, x_2, x_3). Ces écoulements satisfont aux conditions suivantes

- les actions mécaniques à distance (forces de volume) sont négligées.
- le champ eulérien des vitesses $\mathbf{v}$ est défini par des composantes de la forme

$$\left\{\begin{array}{lcl} v_1 & = & u(x_2, t) \\ v_2 & = & w(x_2, t) \\ v_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

- à l'infini ($x_2 \to +\infty$), la composante v_1 tend vers une fonction donnée $U(t)$ et les dérivées partielles première et seconde de u par rapport à x_2 tendent vers 0 quel que soit t.
- la pression p ne dépend que de x_1 et de t.
- le plan $x_2 = 0$ qui délimite le domaine fluide est une paroi poreuse le long de laquelle le fluide est uniformément aspiré, de sorte que les conditions à écrire le long de cette paroi sont

$$\left\{\begin{array}{lcccll} v_1 & = & u(0,t) & = & 0 & \forall t \\ v_2 & = & w(0,t) & = & -W & \forall t \end{array}\right.$$

  où $W > 0$ est une vitesse donnée indépendante de t.

1. Montrer, en tirant notamment parti des équations de Navier-Stokes, que la fonction w est une constante, indépendante de x_2 et de t, et que la fonction u vérifie l'équation aux dérivées partielles
$$\frac{\partial u}{\partial t} - W\frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$$
où $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ désigne la viscosité cinématique du fluide.

On se limite à présent aux écoulements stationnaires, en particulier $U(t) = U_0$ constante.

2. Déterminer alors la composante v_1 du champ des vitesses.
3. Déterminer les trajectoires et les lignes de courant de cet écoulement.
4. Calculer la contrainte tangentielle le long de la paroi $x_2 = 0$.
5. Evaluer le tourbillon des vitesses $\vec{w} = \frac{1}{2}\mathbf{rot}_x\mathbf{v}$ au sein du fluide.
6. Calculer la perte de débit, due à la viscosité, à travers la surface $\{x_1 = 0, x_2 > 0, 0 < x_3 < 1\}$.
7. Examiner l'allure de l'écoulement lorsque $\nu \to 0$.

Problème 2 (10 points) : On considère un barreau cylindrique infiniment long, de révolution autour de l'axe Oz et de rayon R. On utilisera, dans tout le problème, le système de coordonnées cylindriques (r, θ, z). Ce barreau, constitué d'un matériau élastique linéaire isotrope et homogène, est soumis, en tout point $\vec{x}$ de coordonnées (r, θ, z), à la densité volumique de forces

$$\mathbf{b}(x) = -\frac{\alpha E}{3(1-2\nu)} \mathbf{grad}_x T(r)$$

où E et ν sont respectivement le module d'Young et le coefficient de Poisson, $\alpha > 0$ une constante donnée, et T une fonction réelle donnée de r, continuement dérivable. Aucun effort ne s'exerce sur la surface latérale $r = R$ du barreau et ses transformations restent infinitésimales.

1. Vérifier rapidement que l'équilibre du barreau est possible, puis montrer que si $\mathbf{u}$ désigne le champ des déplacements, l'équation vectorielle de l'équilibre peut s'écrire

$$\mathbf{grad}_x(\mathrm{div}_x \mathbf{u}) - \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \mathbf{rot}_x(\mathbf{rot}_x \mathbf{u}) = \alpha \frac{1+\nu}{3(1-\nu)} \mathbf{grad}_x T(r)$$

2. On suppose que le champ des déplacements est radial, c'est à dire que $\mathbf{u}$ est de la forme $\mathbf{u} = u(r)\, \vec{e_r}$, où u est une fonction deux fois continuement dérivable de r. Donner l'équation différentielle vérifiée par u.

3. On suppose que le déplacement des points du barreau situés sur l'axe de révolution Oz reste fini et que $T(R) = 0$. Montrer alors, en tirant également parti des conditions aux limites en contrainte sur la suface latérale $r = R$, que l'on a

$$\mathbf{u}(r) = \alpha \frac{1+\nu}{3(1-\nu)} \left[\frac{1}{r} \int_0^r T(\rho)\rho \,\mathrm{d}\rho + (1-2\nu) \frac{r}{R^2} \int_0^R T(\rho)\rho \,\mathrm{d}\rho \right]$$

4. En déduire alors l'expression des champs de déformation et de contrainte.