

**E.N.T.P.E**  
**Département Mathématiques, Informatique et Physique**

**Cours de Mécanique des Milieux Continus (1<sup>ère</sup> année)**  
**Devoir numéro 1**  
**Durée 2 heures**

**Vendredi 20 Octobre 2000**

Soit  $\overline{\Omega}_0 = \{(X_1, X_2) \in \mathbb{R}^2, X_1^2 + X_2^2 \geq 1\}$  l'ensemble des points du plan  $\mathbb{R}^2$  privé du disque ouvert unité centré sur l'origine  $O$  de ce plan et soit, relativement au repère orthonormé direct  $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ ,  $\mathcal{F}$  la transformation définie sur  $\overline{\Omega}_0 \times \mathbb{R}^+$  par

$$\vec{x} = \mathcal{F}(\vec{X}, t) \iff \begin{cases} x_1 &= X_1 \cos a(R, t) - X_2 \sin a(R, t) \\ x_2 &= X_1 \sin a(R, t) + X_2 \cos a(R, t) \end{cases} \quad (1)$$

où  $t \geq 0$  désigne la variable temps,  $R = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$ ,  $a(R, t) = \frac{\alpha t^2}{R}$  et où  $\alpha > 0$  est une constante donnée de dimension  $\text{LT}^{-2}$ .

**Indications** Dans tout le problème et dans le souci d'alléger l'écriture on posera  $b(R, t) = \frac{2\alpha t}{R}$  ainsi que  $c(R, t) = \frac{\alpha t^2}{R^3}$  et l'on pourra même simplement, sans pour autant oublier leur dépendance vis-à-vis des variables d'espace et de temps, désigner respectivement par  $a$ ,  $b$  et  $c$  les grandeurs  $a(R, t)$ ,  $b(R, t)$  et  $c(R, t)$ .

1. Déterminer la nature des trajectoires des particules de  $\overline{\Omega}_0$ .
2. On s'intéresse aux courbes matérielles constituées, à l'instant  $t = 0$ , par les cercles de  $\overline{\Omega}_0$  centrés sur l'origine du plan  $\mathbb{R}^2$ . Que deviennent elles à l'instant  $t$  ?
3. Reprendre la question 2 en considérant cette fois les courbes matérielles constituées, à l'instant  $t = 0$ , par les demi-droites de  $\overline{\Omega}_0$  d'équations en coordonnées polaires  $\Theta = \text{cste}$  (on utilisera avantageusement le système de coordonnées polaires  $r$  et  $\theta$  relatif à la configuration déformée  $\overline{\Omega}_t$ ). Représenter sommairement la transformée à l'instant  $t$  de l'une de ces demi-droites.
4. Donner l'expression lagrangienne  $\mathbf{v}(\vec{X}, t)$  du champ des vitesses.
5. Inverser la transformation  $\mathcal{F}_t$  relative à l'instant  $t$ .
6. Des résultats obtenus aux questions 4 et 5 déduire l'expression eulérienne  $\mathbf{v}(\vec{x}, t)$  du champ des vitesses. Montrer alors que la transformation de  $\overline{\Omega}_0$  est isochore puis donner l'expression des lignes de courant à l'instant  $t$ . Quelle réflexion vous inspire ce dernier résultat lorsqu'on le compare à celui de la question 1 ?

7. Donner l'expression  $\boldsymbol{\gamma}(\vec{x}, t)$  du champ des accélérations en variables d'Euler puis celle de ses courbes enveloppes (on utilisera avantageusement le système de coordonnées polaires  $r$  et  $\theta$ ). Représenter sommairement quelques unes de ces courbes.
8. Déterminer,  $\forall \vec{X} \in \Omega_0$  et  $\forall t \geq 0$ , la transformation linéaire tangente  $\mathbf{F}(\vec{X}, t)$ . Donner, en la justifiant mais sans pour autant la calculer, la valeur de son déterminant.
9. On se limite, dans cette question, aux points de la demi-droite matérielle  $\mathcal{D}_0 \subset \Omega_0$  d'équation  $X_2 = 0$  et  $X_1 > 1$  à l'instant  $t = 0$ . Donner alors l'expression de  $\mathbf{F}(\vec{X}, t)$  aux points de  $\mathcal{D}_0$  et en déduire celle du tenseur de Cauchy à droite  $\mathbf{C}$  puis du tenseur de Green-Lagrange  $\mathbf{L}$ . Déterminer les dilatations  $\varepsilon_{NN}$  dans les directions  $\vec{N} = \vec{e}_1$  et  $\vec{N} = \vec{e}_2$  puis montrer que la distorsion  $\gamma_{NT}$  entre ces deux directions est égale à  $-\arctan a$ . Donner enfin l'expression des valeurs principales de  $\mathbf{L}$  puis celle des directions principales de déformation.
10. On suppose à présent que  $t \in [0, T]$ , l'instant  $T$  étant choisi de façon telle que  $\alpha T^2 \ll 1$ . On a donc,  $\forall R \geq 1$  et  $\forall t \in [0, T]$ ,  $a \ll 1$ . Reprendre, en négligeant les termes d'ordre supérieur ou égal à deux en  $a$ , l'expression de  $\mathbf{F}$  obtenue à la question 8 et valable  $\forall \vec{X} \in \Omega_0$  et  $\forall t \geq 0$ . En déduire ensuite,  $\forall \vec{X} \in \Omega_0$  et  $\forall t \in [0, T]$ , celle du tenseur linéarisé des petites déformations  $\boldsymbol{\varepsilon}$ . Quelles sont alors les déformations principales et les directions principales de déformation aux points de la droite matérielle  $\mathcal{D}_0$  définie à la question 9 ?