# E.N.T.P.E
# Département Mathématiques, Informatique et Physique

**Cours de Mécanique des Milieux Continus (1ère année)**
**Devoir de rattrapage**
**Durée 2 heures**

## Mardi 4 Septembre 2001

**Exercice 1 : Sollicitation thermomécanique d'une poutre élastique hétérogène (6 points)** Une poutre de longueur $l$ et de sections droites rectangulaires et identiques (figure 1) est composée de deux matériaux thermoélastiques linéaires et isotropes de modules d'Young respectifs $E_1$ (matériau 1 : $0 \leq x_1 \leq \frac{l}{2}$) et $E_2$ (matériau 2 : $\frac{l}{2} \leq x_1 \leq l$). On soumet la section médiane $x_1 = \frac{l}{2}$ de cette poutre à un déplacement horizontal $u_0 > 0$ tout en maintenant sa longueur constante et l'on désigne par $u_1(x_1)$ le déplacement horizontal de ses sections droites induit par cette sollicitation mécanique.

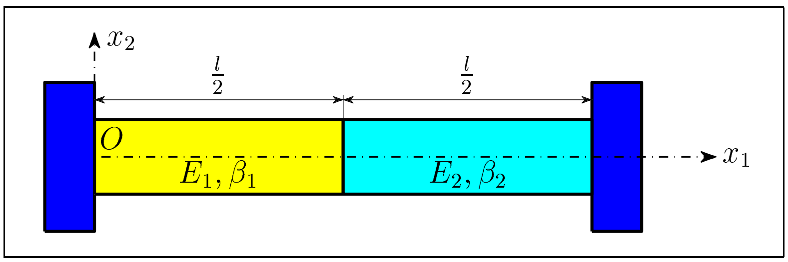


Figure 1: Sollicitation thermique d'une poutre hétérogène

1. Les actions mécaniques à distance étant négligées et la température maintenue constante, déterminer $u_1(x_1)$ ainsi que les composantes $\varepsilon_{11}$ et $\sigma_{11}$ du tenseur linéarisé des petites déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$ et du tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$. En déduire la force extérieure $F$ ayant permis d'imposer à la section médiane $x_1 = \frac{l}{2}$ le déplacement $u_0$.

2. La sollicitation précédente étant maintenue, la poutre est à présent soumise à une variation de température $\Delta T = T - T_0$. Que deviennent alors $u_1(x_1)$, $\varepsilon_{11}$, $\sigma_{11}$ et $F$ ? A quelle condition a-t-on $F = 0$ ?

**Exercice 2 : Ecoulement d'un fluide visqueux newtonien (6 points)** On s'intéresse ici à l'écoulement permanent d'un fluide visqueux newtonien incompressible et non pesant dans une conduite constituée d'un demi-cylindre de révolution de rayon $R$ et de génératrices parallèles à l'axe $Oz$. On admet alors, compte tenu de ces hypothèses et de la géométrie du problème, que le champ des vitesses exprimé dans le repère local $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$ associé au système de coordonnées cylindriques $(r, \theta, z)$ adopte la forme $\mathbf{v} = v(r, z)\vec{e_z}$ où $v$ est une fonction inconnue dépendant a priori des variables $r$ et $z$.

1. Déterminer le profil des vitesses dans les sections droites de la conduite.

2. Montrer que le débit volumique $Q$ du fluide est proportionnel à la puissance quatrième du rayon de cette conduite.

3. Donner, en fonction de la viscosité dynamique de cisaillement $\eta$ du fluide et de sa vitesse $v_0$ aux points de l'axe $Oz$, l'expression de la force de frottement $\vec{F}$ par unité de longueur qu'exerce ce fluide sur les parois de la conduite.

**Problème : Expansion plane homogène (8 points)** On donne, dans l'espace physique $\mathbb{R}^3$ rapporté au repère orthonormé direct $R = (O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, la transformation linéaire suivante :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & = & X_1 + \alpha t \, X_2 \\ x_2 & = & X_2 - (\alpha t)^2 X_1 \\ x_3 & = & X_3 \end{array} \right.$$

où $t \geq 0$ est la variable temps, $\alpha > 0$ une constante donnée de dimension $\mathrm{T}^{-1}$ et où $X_1$, $X_2$ et $X_3$ désignent les coordonnées de la particule $P$ à l'instant de référence $t = 0$. Enfin l'on pourra, dans tout le problème et afin d'alléger l'écriture, poser $\tau = \alpha t$.

1. Déterminer la nature des trajectoires des particules (on distinguera plusieurs cas selon la position initiale de ces particules).

2. On s'intéresse aux courbes matérielles constituées, à l'instant $t = 0$, par les droites du plan $X_3 = C$ passant par l'origine de ce plan. Que deviennent-elles à l'instant $t$ ?

3. On s'intéresse à présent aux courbes matérielles constituées, à l'instant $t = 0$, par les cercles du plan $X_3 = C$ centrés sur l'origine de ce plan. Montrer qu'il existe un unique instant $t \neq 0$, que l'on déterminera, auquel ces cercles sont encore des cercles.

4. Que valent, à l'instant $t$, les dilatations dans les directions $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$ ainsi que la demi-distorsion entre ces deux directions ?

5. Donner, à l'instant $t = \frac{1}{\alpha}$, la décomposition polaire de la transformation linéaire tangente $\mathbf{F}$.

6. Donner l'expression de la vitesse $\mathbf{v}$ en variables de Lagrange puis en variables d'Euler.

7. Déterminer les lignes de courant aux instants $t = 0$ et $t = +\infty$.

8. Donner l'équation paramétrique de la ligne d'émission du point de coordonnées $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ et $x_3 = 0$ à l'instant $t = \frac{1}{\alpha}$.