E.N.T.P.E
Département Mathématiques, Informatique et Physique

Cours de Mécanique des Milieux Continus ($1^{\text{ère}}$ année)
Devoir numéro 2
Durée 2 heures

Jeudi 13 Décembre 2001

Problème 1 : Sphère creuse soumise à une source attractive Une sphère creuse de rayon intérieur R_0 et de rayon extérieur R_1 est soumise au champ d'actions mécaniques à distance $\mathbf{b} = -k\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3}$, où k est une constante strictement positive donnée de dimension $\mathrm{L}^3\mathrm{T}^{-2}$. Cette sphère est constituée d'un matériau de masse volumique ρ ayant un comportement élastique linéaire isotrope, de module d'Young E et de coefficient de Poisson $\nu = \frac{1}{3}$. On suppose alors, compte tenu des symétries du problème, que le champ des déplacements exprimé dans le repère local $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_\varphi})$ associé au système de coordonnées sphériques (r, θ, φ) adopte la forme $\mathbf{u} = u(r)\,\vec{e_r}$, où u est une fonction inconnue de la variable d'espace r que l'on se propose de déterminer.

1. Montrer que les modules de Lamé λ et μ satisfont la relation $\lambda = 2\mu$ et donner l'expression de λ en fonction de E.
2. Donner, en fonction de u et r, l'expression du tenseur linéarisé des petites déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$ puis en déduire, en fonction cette fois de u, r et λ, celle du tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$.
3. On pose, dans tout ce qui suit, $C = \frac{\rho k}{4\lambda}$. Montrer que la constante C ainsi définie est homogène à une longueur puis vérifier, en tirant parti de la question 1, que l'on a aussi $C = \frac{\rho k}{3E}$.
4. Des questions 1, 2 et 3 déduire, en tirant parti de la seule équation indéfinie de l'équilibre non trivialement satisfaite, que u est solution de l'équation différentielle ordinaire
$$u''(r) + 2\frac{u'(r)}{r} - 2\frac{u(r)}{r^2} \;=\; 2\frac{C}{r^2} \qquad r \in]R_0, R_1[\tag{1}$$
5. Montrer que l'équation différentielle ordinaire (1) admet une solution particulière $u^{(1)}(r)$ de la forme $u^{(1)}(r) = a$ et donner, en fonction de C, l'expression de la constante a. Chercher ensuite des solutions $u^{(0)}(r)$ de l'équation homogène associée sous la forme $u^{(0)}(r) = r^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}^\star$. En déduire alors, en fonction de C, r et de deux constantes d'intégration A et B, l'expression générale de $u(r)$.
6. La sphère n'étant soumise à aucune action mécanique de contact, écrire les conditions aux limites en contrainte en $r = R_0$ et $r = R_1$ puis donner, en fonction de C, R_0 et R_1 et sous la forme la plus simple possible, l'expression des deux constantes d'intégration A et B.
7. De la question 6 déduire, en fonction de C, R_0 R_1 et r, l'expression des composantes non nulles de $\mathbf{u}$ et $\boldsymbol{\varepsilon}$ puis, en fonction cette fois de ρ, k, R_0 R_1 et r, celle des composantes non nulles de $\boldsymbol{\sigma}$.

8. Le matériau obéissant au critère de limite élastique de Tresca, déduire, en fonction de ρ, k, R_0, R_1 et de la limite élastique en traction simple σ_0, la condition de non plastification de la sphère.
9. Le ratio $\alpha = \frac{R_1}{R_0}$ étant imposé par le constructeur, quelle est, en fonction de ρ, k, σ_0 et α, la valeur minimale que l'on doit donner à R_0 pour qu'il n'y ait aucune déformation plastique ? Quelle valeur faut-il retenir si α est inconnu ?
Application numérique : $\rho = 7\,10^4\,\mathrm{Nm}^{-3}$, $k = 100\,\mathrm{m}^3\mathrm{s}^{-2}$, $\sigma_0 = 350\,\mathrm{Mpa}$ et $\alpha = 2$.
10. Les actions mécaniques à distance $\mathbf{b}$ étant maintenues, la sphère creuse est à présent soumise à des pressions intérieure p_0 et extérieure p_1 que l'on souhaite ajuster de façon à obtenir un champ de déplacement $\mathbf{u}$ indépendant de r. Quelles sont alors, en fonction de ρ, k, R_0 et R_1, les expressions de p_0 et p_1 ? Quelle valeur minimale doit on à présent donner à R_0 si l'on veut qu'il n'y ait aucune déformation plastique ?
Application numérique : $\rho = 7\,10^4\,\mathrm{Nm}^{-3}$, $k = 100\,\mathrm{m}^3\mathrm{s}^{-2}$ et $\sigma_0 = 350\,\mathrm{Mpa}$.

Problème 2 : Ecoulement concentrique d'un fluide visqueux newtonien Un solide cylindrique de rayon R_0 (rotor) est animé d'un mouvement de rotation uniforme à vitesse angulaire ω autour de son axe de révolution Oz. Le domaine de l'espace physique extérieur au cylindre et compris entre les plans $z = 0$ et $z = H$ est en totalité occupé par un fluide visqueux newtonien incompressible de viscosité dynamique de cisaillement η et de masse volumique ρ indépendantes des variables d'espace. Le mouvement du fluide induit par celui du rotor ayant atteint un régime permanent, on suppose alors, compte tenu des symétries du problème, que le champ eulérien des vitesses exprimé dans le repère local $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$ associé au système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) adopte la forme $\mathbf{v} = v(r)\,\vec{e_\theta}$ où v est une fonction inconnue de la variable d'espace r que l'on se propose de déterminer. On suppose par ailleurs qu'en raison de ces mêmes symétries la pression p est indépendante de θ.

1. Vérifier rapidement l'incompressibilité du fluide puis donner, en fonction de v et r, l'expression eulérienne du champ des accélérations $\boldsymbol{\gamma}$.
2. Donner, en fonction de v et r, l'expression du tenseur $\mathbf{D}$ des taux de déformation puis en déduire, en fonction cette fois de v, r, η et p, celle du tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$.
3. Les actions mécaniques à distance étant ici négligées, de la question 2 déduire, en tirant parti de la projection sur $\vec{e_\theta}$ des équations indéfinies du mouvement, que v est solution de l'équation differentielle ordinaire
$$v''(r) + \frac{v'(r)}{r} - \frac{v(r)}{r^2} = 0 \qquad r > R_0 \tag{2}$$
4. Donner la solution générale l'équation différentielle ordinaire (2) puis déterminer les deux constantes d'intégration A et B en tirant parti des conditions aux limites cinématiques en $r = r_0$ et $r = +\infty$, En déduire alors, en fonction de ω, r_0 et r, l'expression finale de v.
5. Des projections des équations indéfinies du mouvement sur $\vec{e_r}$ et $\vec{e_z}$ et de l'expression de v trouvée à la question 4 déduire celle de la pression p lorsqu'on la suppose nulle en $r = r_0$.
6. Donner l'expression des composantes non nulles de $\boldsymbol{\sigma}$ puis en déduire, en fonction de η, ω, r_0 et H, celle du couple C nécessaire à entretenir le mouvement du fluide.