

E.N.T.P.E
Département Mathématiques, Informatique et Physique

Cours de Mécanique des Milieux Continus (1^{ère} année)
Devoir numéro 3
Durée 2 heures

Jeudi 24 Janvier 2002

Problème : Essai triaxial fretté Une éprouvette cylindrique de rayon R et de demi-hauteur H est soumise à un essai triaxial fretté (i.e. les déplacements radiaux en $z = \pm H$ sont totalement empêchés) ainsi que l'illustre la figure 1 où le contour en trait discontinu est celui de l'échantillon dans sa configuration initiale tandis que le domaine grisé représente sa configuration déformée à l'état d'équilibre final.

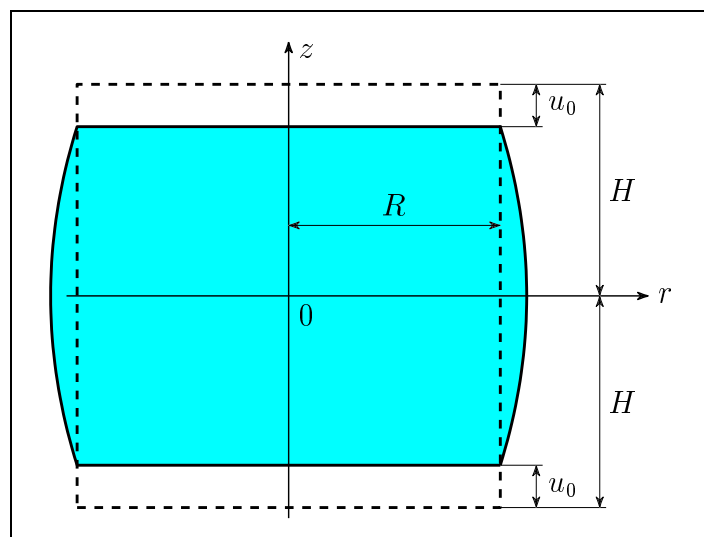


FIG. 1 – Essai triaxial fretté

Cette éprouvette est constituée d'un matériau non pesant ayant un comportement élastique linéaire isotrope, de modules de Lamé λ et μ . On suppose alors, compte tenu de la géométrie du problème, que le champ des déplacements exprimé dans le repère local $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ associé au système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) adopte la forme $\mathbf{u} = u_r(r, z)\vec{e}_r + u_z(z)\vec{e}_z$, où u_r (resp^t $= u_z$) est une fonction inconnue des variables d'espace r et z (resp^t de la seule variable d'espace z).

1. Montrer, en tirant parti des équations de Lamé-Navier, que u_r et u_z sont solutions d'un système de deux équations aux dérivées partielles que l'on explicitera.

Dans toute la suite du problème on choisit d'approcher u_z par la fonction linéaire $z \mapsto -\frac{u_0}{H}z$.

2. Montrer que cette approximation de u_z satisfait les conditions aux limites cinématiques en $z = \pm H$ ainsi que les exigences de symétrie du problème en $z = 0$ puis en donner une interprétation physique. Selon vous, l'hypothèse ainsi faite est-elle vraisemblable?
3. De l'équation de Lamé-Navier en projection sur \vec{e}_z ainsi que des exigences de symétrie du problème en $r = 0$ déduire que l'approximation précédente de u_z implique $\partial_z u_r = 0$.

Montrer ensuite, en tirant cette fois parti des conditions aux limites cinématiques en $z = \pm H$, que l'on a nécessairement $u_r = 0$. Vérifier enfin que cette expression de u_r satisfait l'équation de Lamé-Navier en projection sur \vec{e}_r .

4. Montrer, en tirant à présent parti des conditions aux limites en contrainte en $r = R$, que la solution obtenue à l'issue de la question 3 n'est acceptable que pour une valeur particulière du coefficient de Poisson ν que l'on déterminera. Justifier alors, par un raisonnement physique, le caractère éminemment prévisible de ce résultat.

L'approximation précédente de u_z par la fonction linéaire $z \mapsto -\frac{u_0}{H}z$ étant conservée, on choisit, dans tout ce qui suit et compte tenu de l'allure approximativement parabolique de la déformée de l'échantillon en $r = R$ (voir la figure 1), d'approcher u_r par la fonction $(r, z) \mapsto ar(1 - \frac{z^2}{H^2})$ où a est une constante que l'on se propose de déterminer. Bien que les questions 3 et 4 nous aient appris que ces deux approximations ne satisfont les équations de Lamé-Navier et l'ensemble des conditions aux limites que pour la valeur triviale $a = 0$ et pour une valeur particulière de ν , on se propose de trouver une valeur optimale de a grâce au théorème de l'énergie potentielle.

5. Montrer que l'approximation précédente de u_r satisfait les conditions aux limites cinématiques en $z = \pm H$ ainsi que les exigences de symétrie du problème en $r = 0$.
6. Des approximations précédentes de u_r et u_z déduire, en fonction de u_0 , H , a , r et z , l'expression des composantes non nulles du tenseur linéarisé des petites déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$. En déduire ensuite, en fonction de ces mêmes grandeurs ainsi que des modules de Lamé λ et μ , celle de l'énergie locale de déformation élastique $w = \frac{1}{2}[\lambda\theta^2 + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}:\boldsymbol{\varepsilon}]$ où $\theta = \text{tr}\boldsymbol{\varepsilon}$.
7. Montrer, en tirant parti du théorème de l'énergie potentielle et plus précisément de la remarque 1 du polycopié page 287, que la valeur optimale de a minimise la fonction $g(a) = \int_{-H}^{+H} \int_0^R w(r, z) 2\Pi r dr dz$.
8. Evaluer $g(a)$ puis déterminer, dans le cas où $R = H$, la valeur optimale a_{opt} de a . On donnera l'expression finale de a_{opt} en fonction de u_0 , H et ν .
9. Les variations de a_{opt} avec ν sont-elles conformes à ce que laisse prédire l'intuition? Enfin, l'expression trouvée est-elle compatible avec les résultats de la question 4?

Exercice 1 : Traction uniaxiale d'un ruban déformable Un ruban constitué d'un matériau capable de subir de grandes déformations est soumis à un essai de traction uniaxiale ainsi que l'illustre la figure 2 où le contour en trait discontinu est celui du ruban dans sa configuration initiale tandis que le domaine grisé représente sa configuration déformée à l'instant t .

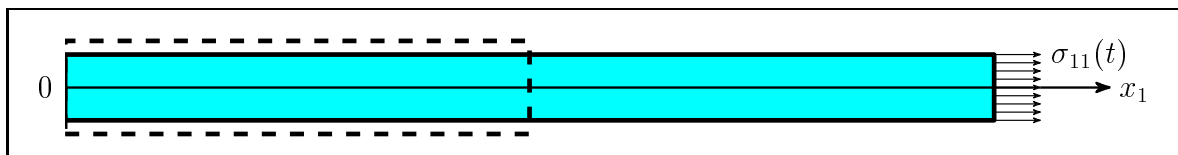


FIG. 2 – Traction uniaxiale d'un ruban déformable

La transformation de ce ruban est supposée adopter la forme

$$\begin{cases} x_1 &= (1 + \alpha t)X_1 \\ x_2 &= (1 + g(t))X_2 \\ x_3 &= (1 + g(t))X_3 \end{cases} \quad t \geq 0 \quad (1)$$

où $\alpha > 0$ est une constante donnée de dimension T^{-1} et g une fonction de la variable temps t que l'on se propose de déterminer. Enfin, Le comportement du matériau est régi par la relation $\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \lambda \text{tr} \mathbf{D} \boldsymbol{\delta} + 2\mu \mathbf{D}$ où \mathbf{D} et \mathbf{W} sont respectivement les tenseurs des taux de déformation et de rotation, où $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ désigne la dérivée objective de Jaumann du tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$, définie par $\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{W} - \mathbf{W} \cdot \boldsymbol{\sigma}$, et où λ et μ sont deux constantes mécaniques définies par $\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ et $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$, avec $E > 0$ et $\nu \in [0, \frac{1}{2}[$ donnés.

1. Donner, après avoir calculé \mathbf{D} et \mathbf{W} , le système de trois équations différentielles ordinaires satisfaites par σ_{11} , σ_{22} et σ_{33} . On exprimera ces équations en fonction de λ , μ , α , t et de la fonction inconnue g .
2. Résoudre le système précédent en supposant les contraintes nulles à l'instant initial $t = 0$. Là encore, on donnera les expressions de σ_{11} , σ_{22} et σ_{33} en fonction de λ , μ , α , t et de la fonction inconnue g .
3. Des conditions aux limites en contrainte sur les parois latérales du ruban déduire, en fonction de α , t et ν , l'expression de g .
4. Donner, en fonction de α , t et E , l'expression finale de σ_{11} .

Exercice 2 : Viscosimètre plan-plan On considère l'écoulement permanent d'un film cylindrique fluide de rayon R et de faible épaisseur h entre deux plaques circulaires. La plaque inférieure est fixe tandis que la plaque supérieure est animée d'un mouvement de rotation uniforme à vitesse angulaire ω ainsi que l'illustre la figure 3. Les actions mécaniques à distance (forces de pesanteur) étant négligeables, on suppose que ω est suffisamment faible pour que les termes d'accélération le soient également. Le comportement de ce fluide visqueux non-newtonien incompressible est par ailleurs régi par la relation suivante : alors que pour un fluide visqueux newtonien incompressible le tenseur \mathbf{D} des taux de déformation est proportionnel à celui des contraintes visqueuses $\boldsymbol{\sigma}^v$ ($\mathbf{D} = \frac{1}{2\eta} \boldsymbol{\sigma}^v$ où η est la viscosité dynamique de cisaillement), on a ici $\mathbf{D} = \frac{1}{2\eta_0} \left(1 + \frac{\|\boldsymbol{\sigma}^v\|}{\sqrt{2}s_0} \right) \boldsymbol{\sigma}^v$ où $\eta_0 > 0$ et $s_0 > 0$ sont des constantes mécaniques caractéristiques du fluide.

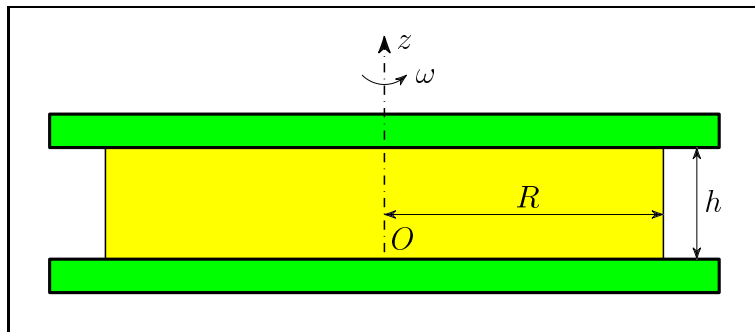


FIG. 3 – Viscosimètre plan-plan

On admet alors, compte tenu de ces hypothèses et de la géométrie du problème, que le champ des vitesses exprimé dans le repère local $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ associé au système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) adopte la forme $\mathbf{v} = v(r, z)\vec{e}_\theta$, où v est une fonction inconnue des variables d'espace r et z que l'on se propose ici de déterminer. Enfin l'on désigne par p_{atm} la pression atmosphérique et par $p(r, z)$ celle du fluide.

1. Vérifier rapidement l'incompressibilité puis donner, en fonction de l'inconnue v , l'expression des composantes non nulles de \mathbf{D} .
2. Des résultats de la question 1 et de l'expression des équations de comportement déduire, sans toutefois chercher à les déterminer, que les seules composantes non nulles de $\boldsymbol{\sigma}$ sont, a priori, $\sigma_{r\theta}$, $\sigma_{\theta z}$ et $\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{zz} = -p$. Donner ensuite, après avoir tiré parti des équations indéfinies du mouvement en projection sur \vec{e}_r et \vec{e}_z , l'expression de p .
3. On cherche une solution en vitesse sous la forme $v(r, z) = f(r)g(z)$. Montrer alors, en tirant parti des conditions aux limites en $z = 0$ et $z = h$, que $g(0) = 0$ et que f ne peut être qu'une fonction linéaire de r . En déduire alors que l'on a $D_{r\theta} = 0$ puis $\sigma_{r\theta} = 0$.
4. Montrer, en tirant parti des résultats obtenus à la question 3 ainsi que de l'équation indéfinie du mouvement en projection sur \vec{e}_θ , que $\sigma_{\theta z}$ n'est fonction que de r . En déduire alors l'expression de $g(z)$ puis, en fonction de ω , h , r et z , celle de $v(r, z)$.
5. Des équations de comportement déduire enfin, en fonction de s_0 , η_0 , ω , h et r , l'expression finale de $\sigma_{\theta z}$. Que se passe-t-il lorsque $s_0 \rightarrow +\infty$?