E.N.T.P.E
Département Mathématiques, Informatique et Physique

Cours de Mécanique des Milieux Continus ($1^{\text{ère}}$ année)
Devoir de rattrapage
Durée 2 heures

Lundi 2 Septembre 2002

Problème : Variables de Lagrange et variables d'Euler

Première partie : Variables d'Euler

La transformation plane d'un milieu continu est caractérisée, dans l'espace physique $\mathbb{R}^2$ rapporté au repère orthonormé direct $R = (O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$, par le champ ***eulérien*** des vitesses :

$$\mathbf{v} = \alpha x_2 \vec{e_1} - \beta x_1 \vec{e_2}$$

où $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ sont deux constantes données de dimension T^{-1}.

1. Montrer que cette transformation s'effectue à volume constant.
2. Donner l'expression des lignes de courant. En déduire alors la nature des trajectoires des particules.
3. Déterminer le tourbillon des vitesses $\widetilde{\vec{w}} = \frac{1}{2}\mathbf{rot}_x\mathbf{v}$.
4. Déterminer l'expression du champ des accélérations en variables d'Euler. Quelles sont alors les courbes enveloppes de ce champ ?
5. Donner l'expression du tenseur gradient des vitesses $\mathbf{G}$ puis celles des tenseurs des taux de déformation $\mathbf{D}$ et de rotation $\mathbf{W}$.
6. Le comportement du milieu continu étant visqueux newtonien, on désigne par η sa viscosité dynamique de cisaillement. Donner alors, en fonction de η, α, β et de la pression p, l'expression du tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$. Dans quel cas ce dernier est-il isotrope ? Selon vous, ce résultat était-t-il prévisible ?
7. On suppose que le milieu continu n'est soumis à aucune action mécanique à distance. Des équations indéfinies eulériennes du mouvement déduire alors, en fonction de α, β, x_1, x_2 et de la masse volumique ρ, l'expression de la pression p en supposant cette dernière nulle au point de l'espace physique de coordonnées $x_1 = x_2 = 0$. Quelle est la nature des courbes isobares ?
8. Vérifier enfin que le mouvement de ce fluide non parfait satisfait néanmoins le théorème de Bernoulli. Comment expliquez-vous ce paradoxe apparent ?

Seconde partie : Variables de Lagrange

La transformation plane d'un milieu continu est à présent caractérisée, dans l'espace physique $\mathbb{R}^2$ rapporté au repère orthonormé direct $R = (O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$, par le champ ***lagrangien*** des vitesses :

$$\mathbf{v} = \alpha X_2 \vec{e_1} - \beta X_1 \vec{e_2}$$

où $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ sont à nouveau deux constantes données de dimension T^{-1} et où X_1 et X_2 désignent les coordonnées de la particule P à l'instant de référence $t = 0$.

1. De l'expression précédente de $\mathbf{v}$ déduire, après intégration, que la transformation $\mathcal{F}_t$ relative à l'instant $t \geq 0$ s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & = & X_1 + \alpha t X_2 \\ x_2 & = & X_2 - \beta t X_1 \end{array} \right.$$

   Quelle est alors la nature des trajectoires des particules ?

2. On s'intéresse à la courbe matérielle constituée, à l'instant $t = 0$, par l'ellipse d'équation $\frac{X_1^2}{\alpha} + \frac{X_2^2}{\beta} = 1$. Que devient-elle à l'instant t ?

3. Donner l'expression de la transformation linéaire tangente $\mathbf{F}$ puis celle des tenseurs de déformation de Cauchy à droite $\mathbf{C}$ et de Green-Lagrange $\mathbf{L}$. A quelle condition la déformation du milieu continu est-elle isotrope ? Selon vous, ce résultat était-il prévisible ?

4. Donner l'expression de la vitesse $\mathbf{v}$ en variables d'Euler. En déduire, en fonction de α, β et de t, l'expression du tenseur des taux de déformation $\mathbf{D}$ ainsi que celle du tenseur des taux de rotation $\mathbf{W}$. Déterminer le tourbillon des vitesses $\widetilde{\vec{w}}$.

Dans tout ce qui suit, le comportement du matériau est régi par la relation $\hat{\boldsymbol{\sigma}} = 2\mu \mathbf{D}$ où $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ désigne la dérivée objective de Jaumann du tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$, définie par $\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \boldsymbol{\sigma}.\mathbf{W} - \mathbf{W}.\boldsymbol{\sigma}$ (on rappelle que $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ représente ici la dérivée temporelle de $\boldsymbol{\sigma}$), et où $\mu > 0$ est une constante mécanique donnée.

5. On suppose satisfaites les conditions $\alpha = 0$ et $\beta > 0$. Donner, après avoir exprimé $\mathbf{D}$ et $\mathbf{W}$, le système de trois équations différentielles ordinaires vérifiées par σ_{11}, σ_{22} et σ_{12} puis résoudre ce dernier en supposant les contraintes nulles à l'instant initial $t = 0$.

   Indication On montrera tout d'abord que l'on a, $\forall t \geq 0$, $\sigma_{11}(t) + \sigma_{22}(t) = 0$.

6. Le matériau possédant une limite élastique donnée par le critère de Von-Mises et σ_0 désignant sa limite élastique en traction simple, dire, selon les valeurs de μ et σ_0, jusqu'à quel instant la solution obtenue à la question 5 reste valable.