E.N.T.P.E
Département Mathématiques, Informatique et Physique

Cours de Mécanique des Milieux Continus ($1^{\text{ère}}$ année)
Devoir numéro 1
Durée 2 heures

Vendredi 18 Octobre 2002

Documents autorisés : Polycopié de cours et notes manuscrites personnelles.
Les archives (i.e. les documents antérieurs au début du cours) ne sont pas autorisées.

Problème : Transformation plane irrotationnelle et isochore

La transformation plane d'un milieu continu est caractérisée, dans l'espace physique $\mathbb{R}^2$ rapporté au repère orthonormé direct $R = (O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$, par le champ ***eulérien*** des vitesses :

$$\mathbf{v} = \alpha x_2 \vec{e_1} + \alpha x_1 \vec{e_2} \tag{1}$$

où $\alpha > 0$ est une constante donnée de dimension T^{-1}.

1. Montrer que cette transformation s'effectue à volume constant, puis donner l'expression de la fonction de courant $\psi(x_1, x_2)$ telle que $v_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}$ et $v_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1}$.

2. Donner l'expression des lignes de courant. En déduire alors la nature des trajectoires des particules puis représenter ces dernières sur une figure en indiquant clairement le sens de parcours des particules.

3. Montrer que le tourbillon des vitesses $\vec{\tilde{w}} = \frac{1}{2}\mathbf{rot}_x\mathbf{v}$ est nul puis donner l'expression du potentiel des vitesses $\varphi(x_1, x_2)$ tel que $\mathbf{v} = \mathbf{grad}_x\varphi$. Représenter le réseau des équipotentielles sur la figure précédente et montrer que ce dernier est orthogonal au réseau des lignes de courant.

4. Déterminer l'expression eulérienne du champ des accélérations $\boldsymbol{\gamma}$. Quelles sont alors les courbes enveloppes de ce champ ?

5. Donner l'expression du tenseur gradient des vitesses $\mathbf{G}$ puis celles des tenseurs des taux de déformation $\mathbf{D}$ et de rotation $\mathbf{W}$.

6. De la résolution du système différentiel $\frac{\mathrm{d}^2\vec{x}}{\mathrm{d}t^2} = \boldsymbol{\gamma}$ et de l'expression de $\boldsymbol{\gamma}$ trouvée à la question 4 déduire, en fonction de α, t, et de quatre constantes d'intégration A, B, C et D, l'expression de la transformation $\mathcal{F}_t$ relative à l'instant t. Montrer ensuite, en tirant parti de la relation $\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{v}$ ainsi que de l'expression (1) de $\mathbf{v}$, que ces quatre constantes se réduisent en fait à deux. Montrer enfin, après avoir exprimé ces deux

dernières constantes en fonction des coordonnées X_1 et X_2 des particules à l'instant initial $t = 0$, que la transformation $\mathcal{F}_t$ relative à l'instant t a pour expression

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & X_1 \cosh \alpha t + X_2 \sinh \alpha t \\ x_2 & = & X_1 \sinh \alpha t + X_2 \cosh \alpha t \end{array}\right.$$

7. Montrer que les courbes matérielles ayant pour équations $X_1^2 - X_2^2 = \text{cste}$ à l'instant initial $t = 0$ sont globalement invariantes. Ce résultat était-il prévisible ?

8. Donner l'expression de la transformation linéaire tangente $\mathbf{F}$ relative à l'instant t puis en déduire celles des tenseurs de Cauchy à droite $\mathbf{C}$ et de Green-Lagrange $\mathbf{L}$.

9. Montrer que les dilatations linéiques ε_{NN} dans les directions $\vec{N}=\vec{e_1}$ et $\vec{N}=\vec{e_2}$ sont identiques et donner leur expression en fonction de $\tau = \alpha t$. Montrer ensuite que la demi-distorsion entre ces deux directions a pour expression $\frac{1}{2} \arcsin(\tanh 2\tau)$ et représenter sur une figure les variations de cette dernière en fonction de τ.

10. De l'étude des propriétés de $\mathbf{F}$ déduire, en tirant parti du théorème 7 du cours, que les tenseurs de déformation pure avant rotation $\mathbf{U}$ et après rotation $\mathbf{V}$ coïncident ici avec $\mathbf{F}$. En déduire les directions principales de déformation $\vec{I_1}$ et $\vec{I_2}$. Déterminer ensuite les valeurs principales de $\mathbf{U}$, $\mathbf{C}$ et $\mathbf{L}$. Donner enfin l'expression des dilatations principales et représenter sur une figure leurs variations en fonction de $\tau = \alpha t$.

11. On s'intéresse à présent au tenseur de déformation de Hencky $\mathbf{H}$ défini par $\mathbf{H} = \ln \mathbf{V}$. Dans le repère principal de déformation $(O, \vec{I_1}, \vec{I_2})$, ce tenseur est diagonal et ses composantes ne sont autres que les logarithmes de celles de $\mathbf{V}$ (rappelons qu'ici $\mathbf{U} = \mathbf{V} = \mathbf{F}$). Quelle est alors l'expression de $\mathbf{H}$ relativement au repère $R = (O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$? Quelle relation existe-t-il ici entre $\mathbf{H}$ et le tenseur des taux de déformation $\mathbf{D}$?