E.N.T.P.E
Département Mathématiques, Informatique et Physique

Cours de Mécanique des Milieux Continus (1$^{\text{ère}}$ année)
Devoir numéro 2
Durée 2 heures

Jeudi 5 décembre 2002

Documents autorisés : Polycopié de cours et notes manuscrites personnelles.
Les archives (i.e. les documents antérieurs au début du cours) ne sont pas autorisées.

Exercice 1 : Cylindre creux soumis à une densité massique orthoradiale de forces
Un cylindre creux d'axe de révolution Oz, de rayon intérieur R_0 et de rayon extérieur R_1 est soumis au champ d'actions mécaniques à distance $\mathbf{b}(\vec{x}) = \Omega\,\vec{e_z} \wedge \vec{x}$ où Ω est une constante strictement positive donnée de dimension T^{-2}. Ce cylindre est constitué d'un matériau de masse volumique ρ ayant un comportement élastique linéaire isotrope, de module d'Young E et de coefficient de Poisson $\nu = 0$. On suppose alors, compte tenu des symétries du problème, que le champ des déplacements exprimé dans le repère local $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$ associé au système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) adopte la forme $\mathbf{u} = u(r)\,\vec{e_\theta}$, où u est une fonction inconnue de la variable d'espace r que l'on se propose de déterminer.

1. Donner, en fonction de u et r, l'expression du tenseur linéarisé des petites déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$ puis en déduire, en fonction cette fois de u, r et E, celle du tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$.
2. Déduire, en tirant parti de la seule équation indéfinie de l'équilibre non trivialement satisfaite, que u est solution de l'équation différentielle ordinaire
$$u''(r) + \frac{u'(r)}{r} - \frac{u(r)}{r^2} \;=\; -2\frac{\rho\Omega}{E}r \qquad r \in]R_0, R_1[\tag{1}$$
3. Montrer que l'équation différentielle ordinaire (1) admet une solution particulière $u^{(1)}(r)$ de la forme $u^{(1)}(r) = ar^3$ et donner, en fonction de ρ, Ω et E, l'expression de la constante a. Chercher ensuite des solutions $u^{(0)}(r)$ de l'équation homogène associée sous la forme $u^{(0)}(r) = r^\alpha$, $\alpha \in \mathrm{I\!R}^\star$. En déduire alors, en fonction de ρ, Ω, E, r et de deux constantes d'intégration A et B, l'expression générale de $u(r)$.
4. On suppose que la paroi intérieure du cylindre ($r = R_0$) n'est soumise à aucune action mécanique de contact et que sa paroi extérieure ($r = R_1$) reste fixe. Ecrire alors les conditions aux limites en $r = R_0$ et $r = R_1$ puis donner, en fonction de ρ, Ω, E, R_0 et R_1, l'expression des deux constantes d'intégration A et B.
5. De la question 4 déduire, en fonction de ρ, Ω, E, R_0 R_1 et r, l'expression des composantes non nulles de $\mathbf{u}$ et $\boldsymbol{\varepsilon}$ puis, en fonction cette fois de ρ, Ω, R_0 et r, celle des composantes non nulles de $\boldsymbol{\sigma}$. Que vaut la rotation subie par la paroi intérieure du cylindre ?
6. Le matériau obéissant au critère de limite élastique de Tresca, déduire, en fonction de ρ, R_0, R_1 et de la limite élastique en traction simple σ_0, la valeur maximale de Ω.

Exercice 2 : Translation-rotation d'une conduite cylindrique Une conduite cylindrique de rayon intérieur R_0 est animé d'un mouvement de rotation uniforme à vitesse angulaire ω autour de son axe de révolution Oz, combiné à un mouvement de translation à vitesse uniforme a dans la direction Oz. Le domaine de l'espace physique intérieur à la conduite est en totalité occupé par un fluide visqueux newtonien incompressible de viscosité dynamique de cisaillement η et de masse volumique ρ indépendantes des variables d'espace. Le mouvement du fluide induit par celui de la conduite ayant atteint un régime permanent, on suppose alors, compte tenu des symétries du problème, que le champ eulérien des vitesses exprimé dans le repère local $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$ associé au système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) adopte la forme $\mathbf{v} = v_\theta(r)\,\vec{e_\theta} + v_z(r)\,\vec{e_z}$, où v_θ et v_z sont deux fonctions inconnues de la variable d'espace r que l'on se propose de déterminer. On suppose par ailleurs qu'en raison de ces mêmes symétries la pression p est indépendante de θ.

1. Vérifier rapidement l'incompressibilité du fluide puis donner, en fonction de v_θ et r, l'expression eulérienne du champ des accélérations $\boldsymbol{\gamma}$.
2. Donner, en fonction de v_θ, v_z et r, l'expression du tenseur $\mathbf{D}$ des taux de déformation puis en déduire, en fonction cette fois de v_θ, v_z, r, η et p, celle du tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$.
3. Les actions mécaniques à distance étant ici négligées, de la question 2 déduire, en tirant parti de la projection sur $\vec{e_\theta}$ des équations indéfinies du mouvement, que v_θ est solution de l'équation différentielle ordinaire
$$v''_\theta(r) + \frac{v'_\theta(r)}{r} - \frac{v_\theta(r)}{r^2} = 0 \quad r \in]0, R_0[\tag{2}$$
4. Donner la solution générale de l'équation différentielle ordinaire (2) puis déterminer les constantes d'intégration en tirant notamment parti des conditions aux limites cinématiques en $r = R_0$. En déduire alors, en fonction de ω et r, l'expression finale de v_θ.
5. De la projection des équations indéfinies du mouvement sur $\vec{e_r}$ et de l'expression de v_θ trouvée à la question 4 déduire celle de la pression p lorsqu'on la suppose nulle en tout point de l'axe Oz.
6. De la projection sur $\vec{e_z}$ des équations indéfinies du mouvement et de l'exppression de p trouvée à la question 5 déduire, en tirant notamment parti des conditions aux limites cinématiques en $r = R_0$, celle de v_z.

Exercice 3 : Traction uniaxiale d'un ruban déformable Un ruban constitué d'un matériau capable de subir de grandes déformations est soumis à un essai de traction uniaxiale ainsi que l'illustre la figure 1 où le contour en trait discontinu est celui du ruban dans sa configuration initiale tandis que le domaine grisé représente sa configuration déformée à l'instant t.

La transformation de ce ruban est supposée adopter la forme
$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & (1+\alpha t)X_1 \\ x_2 & = & (1+g(t))X_2 \\ x_3 & = & (1+g(t))X_3 \end{array}\right. \qquad t \geq 0 \tag{3}$$

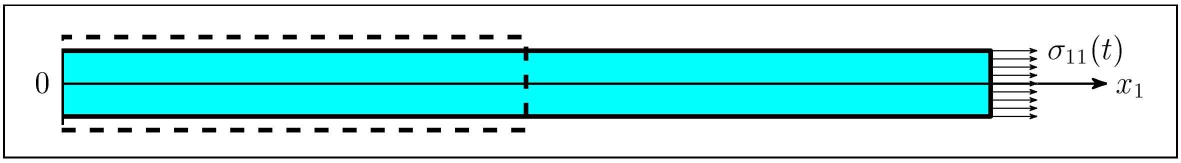

FIG. 1 – Traction uniaxiale d'un ruban déformable

où $\alpha > 0$ est une constante donnée de dimension T^{-1} et g une fonction de la variable temps t que l'on se propose de déterminer. Enfin, Le comportement du matériau est régi par la relation $\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \lambda \,\mathrm{tr}\mathbf{D}\,\boldsymbol{\delta} + 2\mu\mathbf{D}$ où $\mathbf{D}$ et $\mathbf{W}$ sont respectivement les tenseurs des taux de déformation et de rotation, où $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ désigne la dérivée objective de Jaumann du tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$, définie par $\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \boldsymbol{\sigma}.\mathbf{W} - \mathbf{W}.\boldsymbol{\sigma}$, et où λ et μ sont deux constantes mécaniques définies par $\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ et $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$, avec $E > 0$ et $\nu \in [0, \frac{1}{2}[$ donnés.

1. Donner, après avoir calculé $\mathbf{D}$ et $\mathbf{W}$, le système de trois équations différentielles ordinaires satisfaites par σ_{11}, σ_{22} et σ_{33}. On exprimera ces équations en fonction de λ, μ, α, t et de la fonction inconnue g.
2. Résoudre le système précédent en supposant les contraintes nulles à l'instant initial $t = 0$. Là encore, on donnera les expressions de σ_{11}, σ_{22} et σ_{33} en fonction de λ, μ, α, t et de la fonction inconnue g.
3. Des conditions aux limites en contrainte sur les parois latérales du ruban déduire, en fonction de α, t et ν, l'expression de g.
4. Donner, en fonction de α, t et E, l'expression finale de σ_{11}.

Exercice 4 : Sollicitation thermomécanique d'un cylindre creux Un cylindre creux d'axe de révolution Oz et de rayon intérieur R_0 est soumis à une variation ΔT de sa température initiale ainsi qu'à une pression uniforme p_0 sur sa paroi intérieure ($r = R_0$). Ce cylindre est constitué d'un matériau ayant un comportement thermoélastique linéaire isotrope, de module d'Young E, de coefficient de Poisson ν et de coefficient de dilatation thermique linéaire β.

1. Quelle valeur ΔT_0 doit on donner à ΔT pour qu'en tout point du cylindre le champ des déplacements soit nul ? On exprimera ΔT_0 en fonction de p_0, E, ν et β.
2. L'élévation de température ΔT ayant la valeur ΔT_0 trouvée à la question 1, quel est alors, en tout point du solide, l'expression du tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$.