E.N.T.P.E
Département Mathématiques, Informatique et Physique

Cours de Mécanique des Milieux Continus (1ère année)
Devoir numéro 3
Durée 2 heures

Jeudi 16 Janvier 2003

Problème : Sollicitation thermomécanique d'une sphère creuse Une sphère creuse de rayon intérieur R_0 et de rayon extérieur R_1 (figure 1) est constituée d'un matériau métallique au comportement thermoélastique linéaire isotrope, de module d'Young E, de coefficient de Poisson $\nu = \frac{1}{3}$ et de coefficient de dilatation thermique linéaire β. La température de cette sphère est initialement uniforme et égale à T_0 et l'on admettra que dans cet état initial, sous l'action des forces gravifiques et de la pression ambiante, les champs tensoriels des petites déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$ et des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ sont nuls. La paroi intérieure de la sphère ($r = R_0$) restant libre de toute autre action mécanique et sa température étant maintenue égale à T_0, la paroi extérieure ($r = R_1$), mise au contact d'un fluide, se trouve portée à la température uniforme T_1 tout en étant soumise à une pression p_1 également uniforme (voir la figure 1). On suppose alors, compte tenu des symétries du problème, que le champ des déplacements exprimé dans le repère local $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_\varphi})$ associé au système de coordonnées sphériques (r, θ, φ) adopte la forme $\mathbf{u} = u(r)\,\vec{e_r}$, où u est une fonction inconnue de la variable d'espace r que l'on se propose de déterminer, tandis que la température T est une fonction également inconnue de cette même variable d'espace.

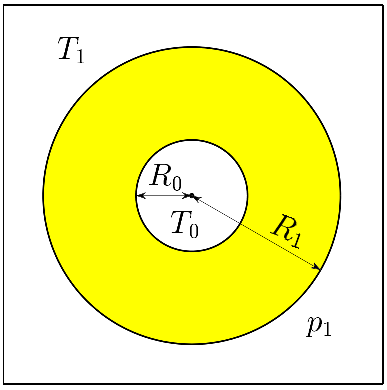

FIG. 1 – Sollicitation thermomécanique d'une sphère creuse

1. Montrer que les modules de Lamé λ et μ satisfont la relation $\lambda = 2\mu$ et donner l'expression de λ en fonction de E.
2. En régime stationnaire, en l'absence de sources internes de chaleur et pour un matériau aux propriétés thermiques homogènes, l'équation de la chaleur se réduit à $\Delta T = 0$, où Δ désigne ici l'opérateur scalaire laplacien. En déduire alors, en fonction de r et de deux constantes d'intégration A et B, l'expression de la température T.
3. Donner, après avoir tiré parti des conditions aux limites thermiques en $r = R_0$ et $r = R_1$, l'expression finale de $T(r)$.

4. Dans tout ce qui suit on désigne à présent par ΔT le champ des écarts entre les températures finale et initiale aux points de la sphère. En d'autres termes on a $\Delta T(r) = T(r) - T_0$, $\forall r \in [R_0, R_1]$. Montrer alors, après avoir calculé $\Delta T(r)$, que les dilatations thermiques $\beta \Delta T(r)$ adoptent la forme $\beta \Delta T(r) = C(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{r})$ où C est une constante dont on donnera l'expression en fonction de β, T_0, T_1, R_0 et R_1.

5. Par un raisonnement simple montrer que même lorsque $p_1 = 0$ le champ tensoriel des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ ne peut être nul en tout point de la sphère dès lors que $T_1 \neq T_0$.

6. Donner, en fonction de r et du déplacement radial inconnu u, l'expression des composantes non nulles du tenseur linéarisé des petites déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$, puis, en fonction cette fois de r, u, λ, C et R_0. celles du tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$.

7. Montrer, en tirant parti de la seule équation indéfinie de l'équilibre non trivialement satisfaite ainsi que des résultats de la question 6, que u est solution de l'équation différentielle ordinaire

$$u''(r) + 2\frac{u'(r)}{r} - 2\frac{u(r)}{r^2} \; = \; 2\frac{C}{r^2} \qquad r \in]R_0, R_1[\tag{1}$$

8. Montrer que l'équation différentielle ordinaire (1) admet une solution particulière $u^{(1)}(r)$ de la forme $u^{(1)}(r) = a$ et donner, en fonction de C, l'expression de la constante a. Chercher ensuite des solutions $u^{(0)}(r)$ de l'équation homogène associée sous la forme $u^{(0)}(r) = r^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}^{\star}$. En déduire alors, en fonction de C, r et de deux constantes d'intégration A et B, l'expression générale de $u(r)$.

9. Des résultats obtenus aux questions 6 et 8 déduire, en fonction de λ, C, r, R_0 et des deux constantes d'intégration A et B, l'expression des composantes non nulles de $\boldsymbol{\sigma}$.

10. Des résultats de la question 9 ainsi que des conditions aux limites en contrainte en $r = R_0$ et $r = R_1$ déduire qu'il est possible d'ajuster la pression extérieure p_1 de telle sorte que u soit une fonction affine de r. Donner alors, en fonction de λ, β, T_0 et T_1, l'expression de p_1.

11. Dans tout ce qui suit on suppose que la pression p_1 satisfait la relation trouvée à la question 10. Achever alors la détermination du déplacement radial u que l'on exprimera en fonction de r et des constantes β, T_0, T_1, R_0 et R_1.

12. On souhaite que le déplacement soit nul en $r = R_1$. Quelle valeur doit on alors donner au rayon extérieur R_1 de la sphère ?

13. Le rayon extérieur R_1 de la sphère ayant la valeur trouvée à la question 12, on suppose enfin que le matériau obéit au critère de limite élastique de Tresca. Quelle est alors, en fonction de λ, β et de la limite élastique en traction simple σ_0, la valeur maximale de l'élévation $T_1 - T_0$ de la température de la paroi extérieure de la sphère ?
Application numérique : $E = 200000\,\text{MPa}$, $\sigma_0 = 300\,\text{Mpa}$ et $\beta = 10^{-5}\,^{\circ}\text{C}^{-1}$.

Exercice 1 : Ecoulement d'un fluide newtonien dans une conduite de section variable
On s'intéresse ici à l'écoulement permanent d'un fluide visqueux newtonien incompressible de viscosité dynamique de cisaillement η et de masse volumique ρ dans la conduite cylindrique d'axe de révolution Oz et de section variable représentée sur la figure 2. En l'absence d'actions

mécaniques à distance on admet, compte tenu des hypothèses et de la géométrie du problème, qu'au voisinage de chacune des sections droites (Σ_1) et (Σ_2) de la conduite (voir la figure 2) le champ des vitesses exprimé dans le repère local $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$ associé au système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) adopte la forme $\mathbf{v} = v(r, z)\,\vec{e_z}$ où v est une fonction inconnue dépendant a priori des variables r et z. On montre alors, par une démarche analogue à celle de l'exercice E5.8 du polycopié (tube de Poiseuille), qu'au voisinage de chacune de ces sections la pression p est uniforme et la fonction v indépendante de z. De façon plus précise on a, en reprenant les résultats de ce même exercice et pour $i \in \{1, 2\}$, $v(r) = \frac{G_i}{4\eta}(R_i^2 - r^2)$ et $p = p_i$ en tout point de la section (Σ_i) de rayon R_i, où G_i est une constante strictement positive. Le débit volumique Q du fluide traversant chacune des deux sections a alors pour expression $Q = \frac{\Pi G_1 R_1^4}{8\eta} = \frac{\Pi G_2 R_2^4}{8\eta}$. Enfin, pour $i \in \{1, 2\}$ on désigne par S_i l'aire de la section (Σ_i) et par v_i la valeur de v au point de cette section situé sur l'axe de révolution Oz.

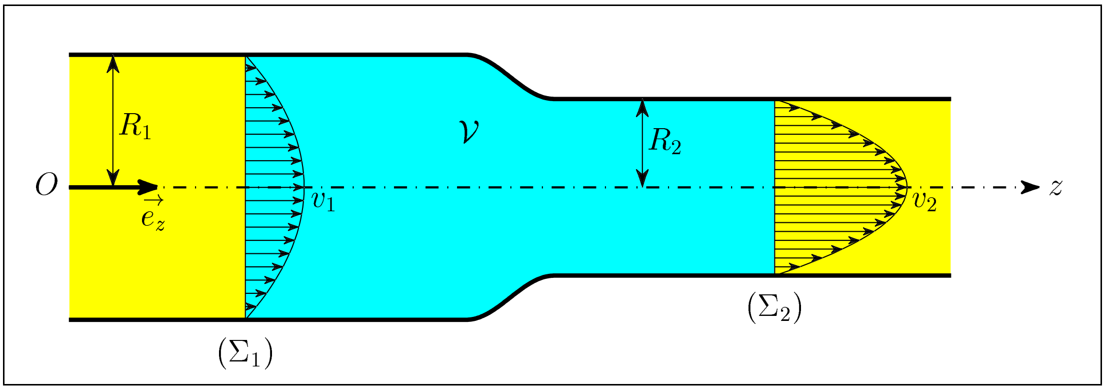

FIG. 2 – Ecoulement d'un fluide newtonien dans une conduite de section variable

1. Soit $\mathcal{V}$ le volume fluide compris entre les sections droites (Σ_1) et (Σ_2) de la conduite (voir la figure 2) et soit $F\vec{e_z}$ la force qu'exerce ce fluide sur les parois de la conduite. De l'application du théorème d'Euler à $\mathcal{V}$ déduire, en fonction de ρ, S_1, S_2, p_1, p_2, v_1 et v_2, l'expression de F.
2. Soit $\mathcal{V}$ le volume fluide défini à la question 1 et soit $\mathcal{P}^{\mathrm{i}}$ la puissance des efforts intérieurs dissipée dans $\mathcal{V}$. Du théorème de l'énergie cinétique appliqué à $\mathcal{V}$ déduire, en fonction de Q, ρ, p_1, p_2, v_1 et v_2, l'expression de $\mathcal{P}^{\mathrm{i}}$.

   Indication : Si h est un champ scalaire et $\mathcal{V}$ un volume matériel de frontière $\mathcal{S}$ on a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathcal{V}} h\,\mathrm{d}v = \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial h}{\partial t}\,\mathrm{d}v + \int_{\mathcal{S}} h\mathbf{v}.\mathbf{n}\,\mathrm{d}s$$

Exercice 2 : Poutre soumise à un champ axial d'actions mécaniques à distance Une poutre de longueur l et de sections droites rectangulaires de mêmes dimensions et d'aire S (figure 3) est consituée d'un matériau homogène de masse volumique ρ au comportement élastique linéaire et isotrope, de module d'Young E et de coefficient de Poisson $\nu = 0$. La poutre, encastrée à son extrémité gauche $x = 0$ et libre à son extrémité droite $x = l$, est soumise à la densité massique d'actions mécaniques à distance $\mathbf{b} = ax^2\,\vec{e_x}$, où a est une constante strictement positive donnée de dimension $\mathrm{L}^{-1}\mathrm{T}^{-2}$. On suppose alors, compte tenu des hypothèses précédentes et de la géométrie du problème, que le champ des déplacements adopte la forme

$\mathbf{u} = u(x)\vec{e_x}$, où $\vec{e_x}$ est le vecteur directeur de l'axe Ox et où u est une fonction de x que l'on se propose de déterminer.

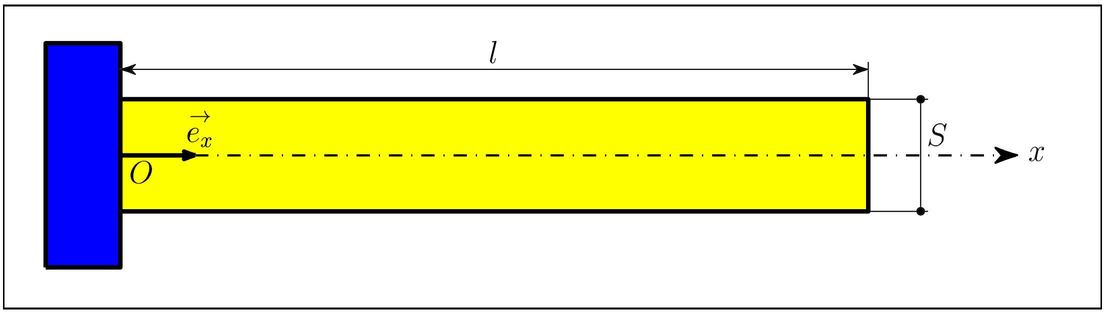

FIG. 3 – Poutre soumise à un champ axial d'actions mécaniques à distance

1. De l'équation indéfinie de léquilibre en projection sur $\vec{e_x}$ ainsi que des conditions aux limites cinématique en $x = 0$ et statique en $x = l$ déduire l'expression du déplacement axial $u(x)$.

On se propose, dans ce qui suit, d'exhiber une solution (a priori approchée) grâce au théorème de l'énergie potentielle.

2. On pose $u(x) = \alpha x$. Donner l'expression de l'énergie potentielle $J(\alpha)$ et dire quelle valeur de α la minimise. Quel est alors le déplacement en $x = l$? (on comparera ce dernier avec la valeur exacte trouvée à la question 1). En quoi cette solution n'est pas satisfaisante ?
3. On pose à présent $u(x) = \alpha x + \beta x^4$. Calculer $J(\alpha, \beta)$ et montrer que l'on obtient alors la solution trouvée à la question 1.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$. Dire, sans faire de calculs mais en le justifiant, ce que l'on obtiendrait en posant $u(x) = \sum_{k=1}^{k=n} \alpha_k x^k$.