# E.N.T.P.E
# Département Mathématiques, Informatique et Physique

**Cours de Mécanique des Milieux Continus (1$^{\text{ère}}$ année)**
**Devoir numéro 1**
**Durée 2 heures**

**Mercredi 22 Octobre 2003**

**Documents autorisés :** Polycopié de cours et notes manuscrites personnelles.
*Les archives (i.e. les documents antérieurs au début du cours) ne sont pas autorisées.*

# Problème : Variables de Lagrange et variables d'Euler

## Première partie : Variables d'Euler

La transformation plane d'un milieu continu est caractérisée, dans l'espace physique $\mathbb{R}^2$ rapporté au repère orthonormé direct $R = (O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$, par le champ ***eulérien*** des vitesses :

$$\mathbf{v} = \alpha x_2 \vec{e_1} - \beta x_1 \vec{e_2} \tag{1}$$

où $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ sont deux constantes données de dimension $\mathrm{T}^{-1}$.

1. Montrer que cette transformation s'effectue à volume constant.
2. Donner l'expression des lignes de courant. En déduire alors la nature des trajectoires des particules.
3. Déterminer le tourbillon des vitesses $\widetilde{\vec{w}} = \frac{1}{2}\mathbf{rot}_x\mathbf{v}$.
4. Déterminer l'expression du champ des accélérations en variables d'Euler. Quelles sont alors les courbes enveloppes de ce champ ?
5. Donner l'expression du tenseur gradient des vitesses $\mathbf{G}$ puis celles des tenseurs des taux de déformation $\mathbf{D}$ et de rotation $\mathbf{W}$.
6. De la résolution du système différentiel $\frac{\mathrm{d}^2\vec{x}}{\mathrm{d}t^2} = \boldsymbol{\gamma}$ et de l'expression de $\boldsymbol{\gamma}$ trouvée à la question 4 déduire, en fonction de $\alpha$, $\beta$, $t$ et de quatre constantes d'intégration $A$, $B$, $C$ et $D$, l'expression de la transformation $\mathcal{F}_t$ relative à l'instant $t$. Montrer ensuite, en tirant parti de la relation $\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{v}$ ainsi que de l'expression (1) de $\mathbf{v}$, que ces quatre constantes se réduisent en fait à deux. Donner enfin, après avoir exprimé ces deux dernières constantes en fonction des coordonnées $X_1$ et $X_2$ des particules à l'instant initial $t = 0$, l'expression de la transformation $\mathcal{F}_t$ relative à l'instant $t$.
7. Donner l'expression de la transformation linéaire tangente $\mathbf{F}$ puis celle des tenseurs de déformation de Cauchy à droite $\mathbf{C}$ et de Green-Lagrange $\mathbf{L}$. A quelle condition la déformation du milieu continu est-elle isotrope ?

8. **Question subsidiaire** Déterminer, en fonction de $\alpha$, $\beta$ et $t$, l'expression de la distorsion $\gamma_{NT}$ entre les directions $\vec{N}=\vec{e_1}$ et $\vec{T}=\vec{e_2}$. Montrer que cette distorsion est extrémale pour $t=(2k+1)\frac{\Pi}{4\sqrt{\alpha\beta}}$, $k \in \mathbb{N}$, et que son extremum vaut $\pm \arcsin \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}$.

## Seconde partie : Variables de Lagrange

La transformation plane d'un milieu continu est à présent caractérisée, dans l'espace physique $\mathbb{R}^2$ rapporté au repère orthonormé direct $R=(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$, par le champ ***lagrangien*** des vitesses :

$$\mathbf{v} = \alpha X_2 \vec{e_1} - \beta X_1 \vec{e_2}$$

où $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ sont à nouveau deux constantes données de dimension $\mathrm{T}^{-1}$ et où $X_1$ et $X_2$ désignent les coordonnées de la particule $P$ à l'instant de référence $t=0$.

1. De l'expression précédente de $\mathbf{v}$ déduire, après intégration, que la transformation $\mathcal{F}_t$ relative à l'instant $t \geq 0$ s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & = & X_1 + \alpha t X_2 \\ x_2 & = & X_2 - \beta t X_1 \end{array} \right.$$

   Quelle est alors la nature des trajectoires des particules ?

2. On s'intéresse à la courbe matérielle constituée, à l'instant $t=0$, par l'ellipse d'équation $\frac{X_1^2}{\alpha}+\frac{X_2^2}{\beta}=1$. Que devient-elle à l'instant $t$ ?

3. Donner l'expression de la transformation linéaire tangente $\mathbf{F}$ puis celle des tenseurs de déformation de Cauchy à droite $\mathbf{C}$ et de Green-Lagrange $\mathbf{L}$. A quelle condition la déformation du milieu continu est-elle isotrope ? Selon vous, ce résultat était-il prévisible ?

4. Déterminer, en fonction de $\alpha$, $\beta$ et $t$, l'expression de la distorsion $\gamma_{NT}$ entre les directions $\vec{N}=\vec{e_1}$ et $\vec{T}=\vec{e_2}$. Montrer que cette distorsion est extrémale pour $t=\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}}$ et que son extremum vaut $\arcsin \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}$. Représenter alors sommairement les variations de $\gamma_{NT}$ en fonction du temps en supposant $\alpha > \beta$.

5. Donner l'expression de la vitesse $\mathbf{v}$ en variables d'Euler. En déduire, en fonction de $\alpha$, $\beta$ et de $t$, l'expression du tenseur des taux de déformation $\mathbf{D}$ ainsi que celle du tenseur des taux de rotation $\mathbf{W}$. Déterminer le tourbillon des vitesses $\overset{\curvearrowright}{w}$.

6. Déterminer les lignes courant à l'instant initial $t=0$.

7. Donner l'équation, de paramètre $\tau \in [0,t]$, de la ligne d'émission à l'instant $t$ du point $M$ de coordonnées $x_1=1$ et $x_2=0$.