1 Méthodes itératives de résolution d'équations non linéaires

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction non linéaire et on suppose qu'il existe $\bar{x} \in \mathbb{R}$ tel que $f(\bar{x}) = 0$. Une suite $(x^{(p)})_{p\geq 0}$ est dite itérative si il existe une application G telle que

$$\forall p \geq 0, \quad x^{(p+1)} = G(x^{(p)})$$

On pose de plus les hypothèses suivantes :

1. $\lim\limits_{p\to\infty} x^{(p)} = \bar{x}$

2. G est continue

Ainsi $\bar{x}$ est un point fixe de l'itération.

1.1 Existence et unicité d'un point fixe

Théorème du point fixe de Picard. *Soient E un espace métrique complet muni de la distance d et D une partie de E. Si $G : D \to D$ est une application strictement contractante de coefficient $l (< 1)$ sur D alors :*

1. *G admet un unique point fixe dans D ($G(\bar{x}) = \bar{x}$)*

2. *$\forall x^{(0)} \in D$, l'itération $x^{(p+1)} = G(x^{(p)})$ converge vers $\bar{x}$*

3. *$\forall p, d(x^{(p+1)}, \bar{x}) \leq d(x^{(p)}, \bar{x})$*

4. *$\forall p, d(x^{(p)}, \bar{x}) \leq \frac{1}{1-l} d(x^{(p)}, x^{(p+1)}) \leq \frac{l^p}{1-l} d(x^{(0)}, x^{(1)})$*

Extension 1 : **Cas d'une itérée contractante.** *Soient E un espace métrique complet muni de la distance d et D une partie de E. Soit $G : D \to D$ une application contractante sur D. De plus si il existe un entier p tel que $H = G^p$ est contractante alors :*

1. *Si $\bar{x}$ est l'unique point fixe de G alors $\bar{x}$ est l'unique point fixe de H,*

2. *$\forall k \in [0; p-1], G^{np+k}(x^{(0)}) = H^n(x^{(k)}) \to \bar{x}$.*

Extension 2 : Dépendance continue vis-à-vis d'un paramètre. *Soient A un espace métrique et E un espace métrique complet. Soit $g : A \times E \to E$ continue. Si les applications $y \mapsto g(x, y)$ sont strictement l-contractantes alors*

$$\forall x \in A, \exists \Phi(x) \in E / g(x, \Phi(x)) = \Phi(x).$$

De plus $\Phi : A \to E$ est continue.

1.2 Conditions d'attraction d'un point fixe

Définition. *On appelle point fixe attractif de G tout vecteur $\bar{x} \in \mathbb{R}^p$ tel que*

1. *$\bar{x}$ est un point fixe de G,*

2. *Il existe un ouvert O du voisinage de $\bar{x}$ tel que $\forall x^{(0)} \in O, \lim_{p \to \infty} x^{(p)} = \bar{x}$.*

Théorème d'Ostrowski : condition suffisante d'attraction d'un point fixe. *Soient D une partie de $\mathbb{R}^p$ un ouvert non vide, $G : D \to \mathbb{R}^p$ une fonction et $\bar{x} \in D$ un point fixe de G. Si G est différentiable en $\bar{x}$ et si le rayon spectral de la jacobienne $J_G(\bar{x})$ est strictement inférieure à 1 ($\rho(J_G(\bar{x})) < 1$), alors $\bar{x}$ est un **point fixe attractif** de la méthode itérative associée à G.*

Remarques :

- Si $\rho(J_G(\bar{x})) > 1$ le point fixe $\bar{x}$ est dit répulsif.

- Si $\rho(J_G(\bar{x})) = 1$ on ne peut pas statuer sur l'attraction de $\bar{x}$ il faut étudier chaque cas en particulier.

- Dans $\mathbb{R}$, le rayon spectral de la jacobienne est simplement la valeur absolue de la dérivée en $\bar{x}$, autrement dit la condition suffisante pour que $\bar{x}$ soit un point fixe attractif est que la pente de G en $\bar{x}$ soit inféreure à 1 ($|G'(\bar{x})| < 1$).

1.3 Ordre d'une méthode itérative

Proposition : Condition suffisante de convergence. *Soient (E, d) un espace métrique et $\left(x^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ qui converge vers $\bar{x} \in E$ tels que*

$$\exists r \in [1; +\infty[, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N, x^{(n)} \neq \bar{x} \text{ et } \lim_{n\to\infty} \frac{d\left(x^{(n+1)}, \bar{x}\right)}{d\left(x^{(n)}, \bar{x}\right)^r} = C > 0$$

alors la suite est d'ordre r. Si de plus $r = 1$ alors nécessairement $0 < C \leq 1$.

Théorème : ordre de convergence d'une méthode itérative scalaire localement convergente. *Soient U un ouvert non vide de $\mathbb{R}$ et $G : U \to \mathbb{R}$ une fonction. Si G admet en un point $\bar{x} \in U$ le développement limité d'ordre $p \geq 1$ suivant :*

$$G(x) = G(\bar{x} + h) = \bar{x} + A\,h^p + O(h^{p+1}) \qquad \text{avec } A \neq 0 \text{ et } |A| < 1 \text{ si } p = 1$$

- *Si $p = 1$, alors $\bar{x}$ point fixe attractif de G ($|G'(\bar{x})| < 1$).*

- *Si $p \geq 2$, alors $\bar{x}$ point fixe superattractif de G ($|G'(\bar{x})| = 0$).*

Il existe de plus un ouvert $V \subset U$ contenant $\bar{x}$ tel que toutes les suites

$$\forall x^{(0)} \in V, \forall n \in \mathbb{N}, x^{(n+1)} = G(x^{(n)}) \in V$$

et sont toutes convergentes d'ordre p.

Théorème : convergence et ordre de convergence d'une méthode itérative. *Soit $G : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ $(k+1)$ fois différentiable et soit $\bar{x}$ point fixe de G. Si $G'(\bar{x}) = G''(\bar{x}) = \ldots = G^{(k)}(\bar{x}) = 0$ et $G^{(k+1)}(\bar{x}) \neq 0$ alors la méthode itérative construite à partir de G converge et est* ***d'ordre*** *(k+1).*

2 Méthodes itératives classiques

2.1 Approche par une droite

2.1.1 Méthode de la parallèle $P_f(x)$

Soit $\alpha \neq 0$ tel que $\frac{1}{\alpha}$ est la pente de la droite de la méthode itérative de la parallèle $P_f(x)$.

$$x^{(p+1)} = P_f(x^{(p)}) = x^{(p)} - \alpha f(x^{(p)}) \Leftrightarrow P_f(x) = x - \alpha f(x)$$

Condition de convergence : $0 < \alpha f'(\bar{x}) < 2$

2.1.2 Méthode de Newton-Raphson $N_f(x)$

Soit $\bar{x}$ une racine simple de f.

$$x^{(p+1)} = N_f(x^{(p)}) = x^{(p)} - \frac{f(x^{(p)})}{f'(x^{(p)})} \Leftrightarrow N_f(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Convergence et ordre : Soient U un ouvert non vide de $\mathbb{R}$ et f une fonction $C^2(U)$. Il existe alors $r > 0$ et $I \subset [\bar{x} - r, \bar{x} + r]$ tel que la fonction f' ne s'annule pas.

$$N_f(x) = \bar{x} + \frac{h^2}{2} \frac{f''(\bar{x})}{f'(\bar{x})} + O(h^3)$$

Ainsi la méthode est localement convergente d'ordre au moins 2 et $\bar{x}$ est un point super-attractif.

2.2 Approche par une hyperbole : méthode de Halley $H_f(x)$

Soit $\bar{x}$ une racine simple de f.

$$x^{(p+1)} = H_f(x^{(p)}) = x^{(p)} - \frac{2\, f(x^{(p)})\, f'(x^{(p)})}{2\, \left(f'(x^{(p)})\right)^2 - f(x^{(p)})\, f''(x^{(p)})}$$

$$\Leftrightarrow H_f(x) = x - \frac{2\, f(x)\, f'(x)}{2\, (f'(x))^2 - f(x)\, f''(x)}$$