

E.N.T.P.E
Département Mathématiques, Informatique et Physique

Cours de Mécanique des Milieux Continus (1^{ère} année)
Devoir numéro 2
Durée 2 heures

Mercredi 10 Décembre 2003

Documents autorisés : Photocopie de cours et notes manuscrites personnelles.

Les archives (i.e. les documents antérieurs au début du cours) ne sont pas autorisées.

Problème : Cylindres creux coaxiaux

On considère les cylindres creux $C^{(1)}$ et $C^{(2)}$ représentés sur la figure 1. Ces deux cylindres, de même axe de révolution Oz , sont constitués du même matériau homogène et non pesant au comportement élastique linéaire et isotrope, de module d'Young E et de coefficient de Poisson $\nu = \frac{1}{3}$.

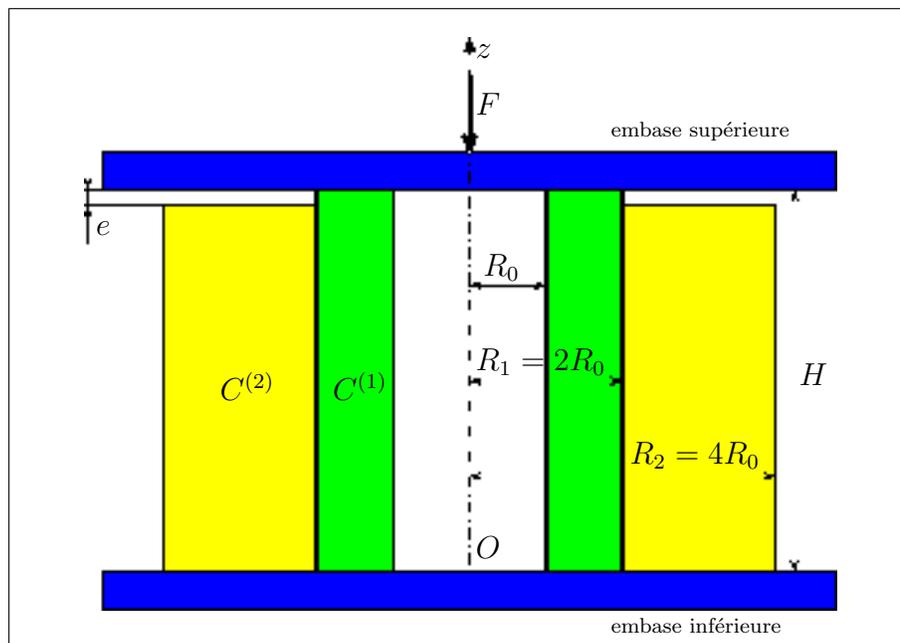


FIG. 1 – Cylindres creux coaxiaux

Le cylindre creux $C^{(1)}$ a pour rayon intérieur R_0 , pour rayon extérieur $R_1 = 2R_0$ et pour hauteur H tandis que $C^{(2)}$ a pour rayon intérieur $R_1 = 2R_0$, pour rayon extérieur $R_2 = 4R_0$ et pour hauteur $H - e$ avec $0 < \frac{e}{H} \ll 1$. L'interface $\{r = R_1, 0 \leq z \leq H\}$ entre les deux cylindres est supposée parfaitement lisse et le cylindre $C^{(1)}$ peut donc glisser librement à l'intérieur de

$C^{(2)}$. Conséquent, les déplacements verticaux des particules initialement situées de part et d'autre de cette interface à une même cote z seront a priori différents. Par ailleurs, l'interface $\{R_0 \leq r \leq R_2, z = 0\}$ entre l'embase inférieure fixe et les cylindres $C^{(2)}$ et $C^{(1)}$ ainsi que l'interface $\{R_0 \leq r \leq R_1, z = H\}$ entre ce dernier cylindre et l'embase supérieure mobile sont elles aussi parfaitement lisses. Les deux embases étant supposées rigides, la force F appliquée au dispositif (voir la figure 1) est donc uniformément répartie à l'interface entre l'embase supérieure et le cylindre $C^{(1)}$.

On souhaite déterminer la valeur F_l de F à partir de laquelle l'embase supérieure entre en contact avec le cylindre $C^{(2)}$. On supposera donc, dans tout ce qui suit, $F \leq F_l$, de sorte que la section supérieure $z = H - e$ de ce cylindre reste libre de toute action mécanique extérieure.

On suppose alors, compte tenu de l'ensemble des hypothèses précédentes, que le champ des déplacements $\mathbf{u}^{(i)}$ du cylindre $C^{(i)}$, $i \in \{1, 2\}$, exprimé dans le repère local $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ associé au système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) , adopte la forme $\mathbf{u}^{(i)}(r, z) = u_r^{(i)}(r)\vec{e}_r + u_z^{(i)}(z)\vec{e}_z$, où $u_r^{(i)}$ et $u_z^{(i)}$, $i \in \{1, 2\}$, sont des fonctions inconnues dépendant respectivement des variables r et z . Enfin l'on désigne par $\boldsymbol{\varepsilon}^{(i)}$ et $\boldsymbol{\sigma}^{(i)}$, respectivement, les champs tensoriels des petites déformations et des contraintes de Cauchy relatifs au cylindre $C^{(i)}$, $i \in \{1, 2\}$.

1. Montrer que les modules de Lamé λ et μ satisfont la relation $\lambda = 2\mu$ et donner l'expression de λ en fonction de E .
2. Donner, en fonction de F et R_0 , l'expression de la contrainte normale $\sigma_{zz}^{(1)}$ en tout point du cylindre $C^{(1)}$.
3. Que vaut la contrainte normale $\sigma_{zz}^{(2)}$ au sein du cylindre $C^{(2)}$?
4. Pour $i \in \{1, 2\}$ donner, en fonction de r , $u_r^{(i)}$ et $u_z^{(i)}$, l'expression des composantes non nulles de $\boldsymbol{\varepsilon}^{(i)}$ puis, en fonction cette fois de λ , r , $u_r^{(i)}$ et $u_z^{(i)}$, celle des composantes non nulles de $\boldsymbol{\sigma}^{(i)}$.
5. Pour $i \in \{1, 2\}$ montrer, en tirant parti des équations indéfinies de l'équilibre et des conditions aux limites cinématiques en $z = 0$, que les déplacements radiaux adoptent la forme $u_r^{(i)}(r) = A^{(i)}r + \frac{B^{(i)}}{r}$, tandis que les déplacements verticaux ont pour expression $u_z^{(i)}(z) = C^{(i)}z$, où $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, $B^{(1)}$, $B^{(2)}$, $C^{(1)}$ et $C^{(2)}$ sont des constantes que l'on se propose à présent de déterminer.
6. Pour $i \in \{1, 2\}$ donner, en fonction de E , $A^{(i)}$, $B^{(i)}$, $C^{(i)}$ et r , l'expression des composantes non nulles de $\boldsymbol{\sigma}^{(i)}$.
7. Du résultat obtenu à la question 2 et des conditions aux limites en contraintes en $r = R_0$ déduire, en fonction de F , E , R_0 et $B^{(1)}$, l'expression des constantes $A^{(1)}$ et $C^{(1)}$.
8. Du résultat obtenu à la question 3 et des conditions aux limites en contraintes en $r = R_2$ déduire, en fonction cette fois de R_0 et $B^{(2)}$, l'expression des constantes $A^{(2)}$ et $C^{(2)}$.

9. De la continuité du déplacement radial u_r et de la contrainte normale σ_{rr} à l'interface $\{r = R_1, 0 \leq z \leq H\}$ entre les deux cylindres jointe aux expressions de $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, $C^{(1)}$ et $C^{(2)}$ trouvées aux questions 7 et 8 tirer le système de deux équations linéaires satisfaites par $B^{(1)}$ et $B^{(2)}$ puis donner, en fonction de F et E , l'expression de ces deux constantes. En déduire alors, en fonction cette fois de F , E et R_0 , celle des constantes $A^{(1)}$, $C^{(1)}$, $A^{(2)}$ et $C^{(2)}$.
10. Pour $i \in \{1, 2\}$ donner, en fonction de F , R_0 et r , l'expression des composantes non nulles de $\sigma^{(i)}$.
11. Donner, en fonction de E , H , e et R_0 , l'expression de la force F_l à partir de laquelle l'embase supérieure entre en contact avec le cylindre $C^{(2)}$, puis simplifier cette expression en négligeant les termes d'ordre supérieur ou égal à deux en $\frac{e}{H}$.
12. On suppose à présent que le matériau constituant les deux cylindres obéit au critère de limite élastique de Tresca et l'on désigne par τ_0 la valeur de la contrainte de cisaillement τ_n à la limite élastique. Pour $F \leq F_l$ dire lequel des deux cylindres $C^{(1)}$ et $C^{(2)}$ est susceptible de plastifier en premier et donner, en fonction de τ_0 et R_0 , l'expression F_e de F à la limite élastique.
13. On souhaite que l'embase supérieure puisse entrer en contact avec le cylindre $C^{(2)}$ sans qu'apparaissent de déformations plastiques. En utilisant l'expression simplifiée de F_l trouvée à la question 11, montrer que la grandeur adimensionnelle $\frac{e}{H}$ ne peut alors excéder une limite proportionnelle à la grandeur adimensionnelle $\frac{\tau_0}{E}$ (on vérifiera que la simplification opérée sur l'expression de F_l va dans le sens de la sécurité).

Application numérique $E = 200000$ MPa, $\tau_0 = 150$ MPa.