E.N.T.P.E
Département Mathématiques, Informatique et Physique

Cours de Mécanique des Milieux Continus (1$^{\text{ère}}$ année)
Devoir numéro 3
Durée 2 heures

Vendredi 16 Janvier 2004

Documents autorisés : Polycopié de cours et notes manuscrites personnelles.
Les archives (i.e. les documents antérieurs au début du cours) ne sont pas autorisées.

Exercice 1 : cylindre en rotation Un cylindre de rayon R, constitué d'un matériau homogène et pesant de masse volumique ρ, est animé d'un mouvement de rotation uniforme à vitesse angulaire ω autour de son axe de révolution Oz. Ce cylindre est constitué d'un matériau élastique linéaire isotrope, de module d'Young E et de coefficient de Poisson $\nu = 0$.

Les actions gravifiques étant ici négligées on suppose alors, compte tenu des hypothèses précédentes et de la géométrie du problème, que le champ des déplacements, exprimé relativement au repère local et mobile $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$ associé au système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) liées au cylindre en rotation, adopte la forme $\mathbf{u} = u(r)\,\vec{e_r}$, où u est une fonction de r que l'on se propose de déterminer.

1. Des équations de Lamé-Navier déduire l'équation différentielle ordinaire dont u est solution puis l'intégrer en tirant parti des conditions aux limites en contrainte en $r = R$.
2. Du résultat obtenu à la question 1 déduire, en fonction de E, ρ, ω et r, l'expression du déplacement radial en $r = R$.

On se propose, dans ce qui suit, d'exhiber une solution (a priori approchée) grâce au théorème de l'énergie potentielle.

3. On pose $u(r) = \alpha r$. Donner l'expression de l'énergie potentielle $J(\alpha)$ et dire quelle valeur de α la minimise. Que vaut alors le déplacement radial en $r = R$? (on comparera ce dernier avec la valeur trouvée à la question 2). En quoi cette solution n'est pas satisfaisante ?
4. On pose à présent $u(r) = \alpha r + \beta r^2 + \gamma r^3$. Calculer $J(\alpha, \beta, \gamma)$ et montrer que l'on obtient alors la solution trouvée à la question 4.
5. Montrer, sans faire aucun calcul, que si l'on pose $u(r) = \alpha r + \beta r^2 + \gamma r^3 + \delta r^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$, on trouve $\delta = 0$, $\forall n$.

Exercice 2 : Ecoulement d'un fluide visqueux newtonien On s'intéresse ici à l'écoulement permanent d'un fluide visqueux newtonien incompressible, de viscosité dynamique de cisaillement η, dans une conduite constituée d'un demi-cylindre de révolution (gouttière) de rayon intérieur R et de génératrices parallèles à l'axe Oz. Les actions mécaniques à distance étant ici négligées on admet alors, compte tenu de ces hypothèses et de la géométrie du problème, que le champ des vitesses exprimé dans le repère local $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$ associé au système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) adopte la forme $\mathbf{v} = v(r, z)\,\vec{e_z}$ où v est une fonction inconnue dépendant a priori des variables r et z.

1. Montrer qu'en fait v ne dépend que de r.
2. Des équations de Navier-Stokes déduire que la pression p est indépendante de r et de θ et que son gradient est constant. On pose alors, dans tout ce qui suit, $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = -G$ et l'on choisit $G > 0$ de façon à ce que le fluide s'écoule dans le sens des z positifs.
3. Du résultat obtenu à la question 2 joint aux équations de Navier-Stokes ainsi qu'aux conditions aux limites cinématiques en $r = R$ déduire, en fonctions de G, η, R et r, l'expression de v.
4. Donner, en fonction de G, η et R, l'expression du débit volumique Q du fluide à travers les sections droites de la conduite.
5. Donner, en fonction de G, η, R et r, l'expression des composantes non nulles du tenseur des taux de déformation $\mathbf{D}$ puis, en fonction cette fois de G, p, R et r, celles du tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$.
6. Des résultats de la question 5 déduire, en fonction de G et R, l'expression de la force de frottement $\vec{F}$ par unité de longueur qu'exerce le fluide sur les parois de la conduite, puis retrouver ce résultat grâce au théorème d'Euler.
7. Des résultats de la question 5 déduire, en fonction de η, G et R, l'expression de la puissance des efforts intérieurs $\mathcal{P}^{\mathrm{i}}$ dissipée par unité de longueur dans l'écoulement, puis retrouver ce résultat grâce au théorème de l'énergie cinétique.

Exercice 3 : Traction uniaxiale d'un ruban déformable Un ruban constitué d'un matériau capable de subir de grandes déformations est soumis à un essai de traction uniaxiale ainsi que l'illustre la figure 1 où le contour en trait discontinu est celui du ruban dans sa configuration initiale tandis que le domaine grisé représente sa configuration déformée à l'instant t.

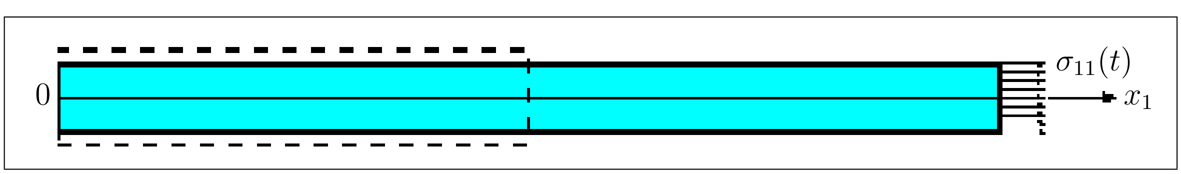

FIG. 1 – Traction uniaxiale d'un ruban déformable

La transformation de ce ruban est supposée adopter la forme

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 & = & (1+\alpha t)X_1 \\ x_2 & = & (1+g(t))X_2 \\ x_3 & = & (1+g(t))X_3 \end{array}\right. \qquad t \geq 0 \tag{1}$$

où $\alpha > 0$ est une constante donnée de dimension T^{-1} et g une fonction de la variable temps t que l'on se propose de déterminer. Enfin, Le comportement du matériau est régi par la relation $\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \lambda \, \mathrm{tr}\mathbf{D}\, \boldsymbol{\delta} + 2\mu\mathbf{D}$ où $\mathbf{D}$ et $\mathbf{W}$ sont respectivement les tenseurs des taux de déformation et de rotation, où $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ désigne la dérivée objective de Jaumann du tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$, définie par $\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \boldsymbol{\sigma}.\mathbf{W} - \mathbf{W}.\boldsymbol{\sigma}$, et où λ et μ sont deux constantes mécaniques définies par $\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ et $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$, avec $E > 0$ et $\nu \in [0, \frac{1}{2}[$ donnés.

1. Donner, après avoir calculé $\mathbf{D}$ et $\mathbf{W}$, le système de trois équations différentielles ordinaires satisfaites par σ_{11}, σ_{22} et σ_{33}. On exprimera ces équations en fonction de λ, μ, α, t et de la fonction inconnue g.
2. Résoudre le système précédent en supposant les contraintes nulles à l'instant initial $t = 0$. Là encore, on donnera les expressions de σ_{11}, σ_{22} et σ_{33} en fonction de λ, μ, α, t et de la fonction inconnue g.
3. Des conditions aux limites en contrainte sur les parois latérales du ruban déduire, en fonction de α, t et ν, l'expression de g.
4. Donner, en fonction de α, t et E, l'expression finale de σ_{11}.
5. Le matériau possédant une limite élastique donnée par le critère de Tresca et τ_0 désignant la valeur de la contrainte de cisaillement τ_n à la limite élastique, donner, en fonction de α, τ_0 et E, la valeur de l'instant jusqu'auquel la solution précédente reste valable.