E.N.T.P.E
Département Mathématiques, Informatique et Physique

Cours de Mécanique des Milieux Continus (1$^{\text{ère}}$ année)
Devoir numéro 1
Durée 2 heures

Vendredi 22 Octobre 2004

Documents autorisés : Polycopié de cours et notes manuscrites personnelles.
Les archives (i.e. les documents antérieurs au début du cours) ne sont pas autorisées.

Problème : Transformation plane isochore

Dans tout le problème on limitera l'étude de la transformation au plan $X_3 = 0$. Par ailleurs, les questions 14 à 18 peuvent être traitées indépendamment du reste du problème.

On donne, dans l'espace physique $\mathbb{R}^3$ rapporté au repère orthonormé direct $R = (O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, la transformation linéaire plane suivante

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 &=& \alpha(t)X_1 + \beta(t)X_2 \\ x_2 &=& \frac{1}{\alpha(t)}X_2 \\ x_3 &=& X_3 \end{array} \right. \tag{1}$$

où $t \geq 0$ désigne la variable temps et où α et β sont deux fonctions continuement différentiables et adimensionnelles. L'instant $t = 0$ étant choisi comme instant de référence, (X_1, X_2, X_3) représentent les coordonnées à cet instant d'une particule donnée P et (x_1, x_2, x_3) les coordonnées de cette même particule à l'instant t.

1. Déterminer les valeurs prises par les fonctions α et β à l'instant initial $t = 0$.
2. Montrer que l'on a nécessairement $\alpha(t) > 0$, $\forall t \geq 0$.
3. On suppose que pour un certain instant $t > 0$ l'on a $\alpha(t) = 2$ et $\beta(t) = 1$. Représenter alors la transformée à cet instant du carré matériel du plan $X_3 = 0$ ayant pour sommets à l'instant initial $t = 0$ les points de coordonnées $(X_1 = 0, X_2 = 0)$, $(X_1 = 1, X_2 = 0)$, $(X_1 = 1, X_2 = 1)$ et $(X_1 = 0, X_2 = 1)$. Reprendre la question avec $\alpha(t) = \frac{1}{2}$ et $\beta(t) = -1$.
4. Soit $\mathcal{D}_0$ la droite matérielle passant par l'origine O et de vecteur directeur unitaire $\vec{N} = N_1 \vec{e_1} + N_2 \vec{e_2}$ à l'instant initial $t = 0$. Montrer que sa transformée à l'instant t est encore une droite $\mathcal{D}_t$ passant par l'origine et dont on donnera un vecteur directeur. Ce résultat était-il prévisible ?
5. Soit $\gamma(t)$ l'angle que font entre elles les droites $\mathcal{D}_0$ et $\mathcal{D}_t$. Donner, en fonction de N_1, N_2, $\alpha(t)$ et $\beta(t)$, l'expression de $\tan \gamma(t)$.
6. Donner l'expression de la transformation linéaire tangente $\mathbf{F}$ puis montrer que la transformation définie par les relations (1) est isochore (i.e. que cette transformation s'effectue à volume constant).
7. Déterminer les tenseurs de Cauchy à droite $\mathbf{C}$ et de Green-Lagrange $\mathbf{L}$.

8. Soit $\theta_0 \in [0, 2\Pi[$ et $\vec{N} = \cos\theta_0 \, \vec{e_1} + \sin\theta_0 \, \vec{e_2}$. Donner, en fonction de θ_0, $\alpha(t)$ et $\beta(t)$, l'expression à l'instant t de la dilatation ϵ_{NN} dans la direction $\vec{N}$ de la configuration de référence.
9. Quelle est, en fonction de $\alpha(t)$ et $\beta(t)$, l'expression à l'instant t de la distorsion γ_{NT} entre les directions initialement orthogonales $\vec{N} = \vec{e_1}$ et $\vec{T} = \vec{e_2}$ de la configuration de référence.
10. La transformation (1) est appliquée à une pièce mécanique réalisée avec un matériau constitué d'une matrice de résine **déformable** renforcée de fibres **indéformables**. A l'instant initial $t = 0$ ces fibres indéformables sont toutes orientées selon la même direction $\vec{N} = \cos\theta_0 \, \vec{e_1} + \sin\theta_0 \, \vec{e_2}$ avec $\theta_0 \in]0, \frac{\Pi}{2}]$. Afin que l'adhérence entre la résine et les fibres ne soit pas altérée au cours de la transformation, on souhaite qu'à chaque instant $t \geq 0$ il n'y ait entre ces dernières (i.e. entre la résine déformable et les fibres indéformables) aucun déplacement relatif (glissement). Montrer qu'il est alors nécessaire que soit satisfaite partout dans la résine la relation :

$$\forall t > 0 \qquad \beta^2(t)\sin^2\theta_0 + 2\alpha(t)\beta(t)\sin\theta_0\cos\theta_0 + \alpha^2(t)\cos^2\theta_0 + \frac{1}{\alpha^2(t)}\sin^2\theta_0 = 1 \qquad (2)$$

11. Montrer que la relation (2) ne peut être satisfaite que si l'on a, $\forall t > 0$, $\alpha(t) \geq \alpha_{\min} > 0$ et donner l'expression de $\alpha_{\min}$ en fonction de θ_0.
12. On suppose $\theta_0 \neq \frac{\Pi}{2}$ et $\alpha(t) > \alpha_{\min}, \forall t \geq 0$. De la relation (2) déduire l'unique expression de la fonction continuement différentiable β compatible avec les conditions initiales établies à la question 1. Cette expression est-elle toujours unique s'il existe un instant $t > 0$ où $\alpha(t) = \alpha_{\min}$? Qu'en est-il par ailleurs si $\theta_0 = \frac{\Pi}{2}$?
13. On suppose à nouveau $\theta_0 \neq \frac{\Pi}{2}$ et $\alpha(t) > \alpha_{\min}$, $\forall t \geq 0$. La fonction β ayant l'unique expression établie au début de la question 12, on désigne par $\vec{n}\,(t) = \cos\theta(t)\,\vec{e_1} + \sin\theta(t)\,\vec{e_2}$ la direction des fibres à l'instant t. Donner alors, en fonction de θ_0 et $\alpha(t)$, l'expression de $\tan\theta(t)$.
14. Les fonctions α et β n'étant désormais plus liées par l'égalité (2) donner, en fonction de x_1, x_2, $\alpha(t)$, $\alpha'(t)$, $\beta(t)$ et $\beta'(t)$, l'expression du champ des vitesses en variables d'Euler.
15. On suppose l'écoulement permanent. De cette hypothèse jointe aux conditions initiales établies à la question 1 déduire alors l'expression générale (i.e. dépendant de deux constantes arbitraires a et b) des fonctions α et β.
16. Les fonctions α et β étant celles trouvées à la question 15, donner l'expression des lignes de courant relatives à l'instant $t \geq 0$. En déduire alors la nature des trajectoires des particules puis représenter ces dernières sur une figure en indiquant clairement le sens de parcours des particules.
17. L'écoulement étant toujours supposé permanent, donner l'expression du champ des accélérations en variables d'Euler. Quelles sont les courbes enveloppes de ce champ ?
18. Est-il possible, dans l'hypothèse d'un écoulement permanent, de satisfaire l'égalité (2) ?