

E.N.T.P.E
Département Mathématiques, Informatique et Physique

Cours de Mécanique des Milieux Continus (1^{ère} année)
Devoir numéro 2
Durée 2 heures

Vendredi 19 Novembre 2004

Documents autorisés : Polycopié de cours et notes manuscrites personnelles.

Les archives (i.e. les documents antérieurs au début du cours) ne sont pas autorisées.

Problème : Sollicitation thermomécanique d'un cylindre

Un cylindre (\mathcal{C}) d'axe de révolution Oz , de rayon R_0 et de hauteur H_0 est enfermé dans une enceinte cylindrique creuse (\mathcal{E}) de même axe de révolution Oz , de rayon intérieur égal au rayon de (\mathcal{C}) et de hauteur intérieure $H = H_0 + e$, avec $\frac{e}{H_0} \ll 1$, comme le représente la figure 1. L'enceinte (\mathcal{E}) est constituée d'un matériau **non déformable** tandis que le cylindre (\mathcal{C}) est un solide déformable, homogène et non pesant au comportement thermoélastique linéaire et isotrope, de module d'Young E , de coefficient de Poisson ν et de coefficient de dilatation thermique linéaire β .

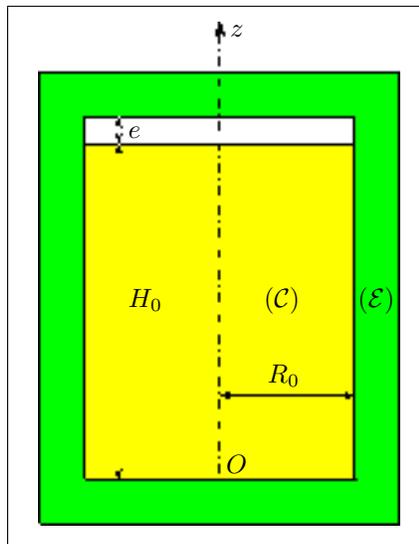


FIG. 1 – Sollicitation thermomécanique d'un cylindre

Le cylindre (\mathcal{C}) est soumis, à partir de l'instant initial $t = 0$, à une augmentation progressive $\Delta T(t) = at$ de sa température, où a est une constante donnée et strictement positive, de dimension θT^{-1} . L'interface entre la paroi latérale $R = R_0$ du cylindre (\mathcal{C}) et l'enceinte (\mathcal{E}) est par ailleurs parfaitement lisse, de sorte que les déplacements verticaux de (\mathcal{C}) ne sont pas empêchés.

On suppose alors, compte tenu de l'ensemble des hypothèses précédentes, que le champ des déplacements \mathbf{u} du cylindre (\mathcal{C}), exprimé dans le repère local $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ associé au système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) (voir la figure B.2 du polycopié, section B.3.2 page 381), adopte la forme $\mathbf{u}(r, z, t) = u_r(r, t)\vec{e}_r + u_z(z, t)\vec{e}_z$, où u_r et u_z sont des fonctions inconnues dépendant respectivement des variables r et z ainsi que de la variable temps. On admet toutefois qu'à chaque instant le cylindre (\mathcal{C}) se trouve dans un état de quasi-équilibre et que

l'accélération est négligeable. On désigne par ailleurs par ε et σ , respectivement, les champs tensoriels des petites déformations et des contraintes de Cauchy au sein du cylindre (\mathcal{C}) et l'on choisit la pression atmosphérique ambiante p_{atm} comme origine des contraintes (i.e. $p_{\text{atm}}=0$). Enfin, on désigne par t_1 la valeur de t où la section supérieure $z = H_0$ du cylindre (\mathcal{C}) entre en contact avec l'enceinte (\mathcal{E}).

1. On suppose $0 \leq t \leq t_1$. Que vaut alors la contrainte normale σ_{zz} en $z = H_0$? Quel est son signe si $t \geq t_1$?
2. On se propose de montrer (ce que suggère évidemment l'intuition) que l'on a $u_r(R_0, t) = 0, \forall t \geq 0$. Justifier tout d'abord, en quelques mots, que l'on ne peut avoir $u_r(R_0, t) > 0$. En supposant ensuite $u_r(R_0, t) < 0$, que peut-on dire de la paroi latérale $R = R_0$ du cylindre puis de l'état de contrainte au sein de ce dernier? Montrer alors, après avoir tiré parti des équations de la thermoélasticité linéaire isotrope ainsi que de la définition de la déformation orthoradiale $\varepsilon_{\theta\theta}$, que l'on aboutit à une contradiction et conclure.
3. Donner, en fonction de u_r, u_z et r , l'expression des composantes non nulles de ε puis, en fonction cette fois de $u_r, u_z, r, \beta, \Delta T$ et des modules de Lamé λ et μ , celles des composantes non nulles de σ .
4. Soit t un instant quelconque mais fixé. De l'équation indéfinie de l'équilibre en projection sur \vec{e}_r déduire l'équation différentielle ordinaire que doit satisfaire u_r à cet instant puis montrer, en tirant notamment parti du résultat obtenu à la question 2, que l'on a nécessairement $u_r = 0$.
5. Soit t un instant quelconque mais fixé. De l'équation indéfinie de l'équilibre en projection sur \vec{e}_z déduire l'équation différentielle ordinaire que doit satisfaire u_z à cet instant puis montrer, en tirant parti des conditions aux limites en $z = 0$, que l'on a $u_z = C(t)z$ où C est une fonction de la variable temps que l'on se propose à présent de déterminer.
6. Donner, en fonction de $C, \lambda, \mu, \beta, a$ et t , l'expression des composantes non nulles de ε et σ .
7. On suppose tout d'abord $0 \leq t \leq t_1$. Donner alors, en fonction de ν, β, a et t et après avoir tiré parti du résultat obtenu à la question 1, l'expression de C . En déduire ensuite, en fonction de E, ν, β, a et t , celle des composantes non nulles de ε et σ .
8. Donner, en fonction de ν, e, H_0, β et a , l'expression de t_1 .
9. On suppose à présent que le matériau constituant le cylindre obéit au critère de limite élastique de Tresca et l'on désigne par σ_0 la limite élastique en traction simple. Pour $0 \leq t \leq t_1$ quelle est, en fonction de σ_0, E, ν et β , l'expression de l'élévation maximale ΔT_{max} de température que peut supporter le cylindre si l'on veut éviter l'apparition de déformations plastiques. Montrer alors que l'on ne peut avoir $t = t_1$ sans plastification que si le ratio $k = \frac{e}{H_0}$ n'excède pas une valeur k_{max} dont on donnera l'expression en fonction de ν, E et σ_0 .

Application numérique Donner la valeur de k_{max} pour $E = 200000$ MPa, $\sigma_0 = 300$ MPa et $\nu = 0.3$. Conclusion.

10. On suppose à présent $k < k_{\text{max}}$ et $t \geq t_1$. Quelle est alors, en fonction de e et H_0 , l'expression de C ? Quelle est son expression, en fonction cette fois de ν, β, a et t_1 . En déduire ensuite, en fonction de E, ν, β, a, t_1 et t , celle des composantes non nulles de σ et montrer qu'il ne peut y avoir apparition de déformations plastiques. Dire pourquoi ce dernier résultat était prévisible.
11. Les hypothèses de la question 10 étant satisfaites, représenter les variations des déplacements verticaux $u_z(\frac{H_0}{2}, t)$ et $u_z(H_0, t)$ entre les instants $t = 0$ et $t = 2t_1$ puis, sur une seconde figure, celles des composantes non nulles de σ . Retrouver le fait qu'il ne peut y avoir apparition de déformations plastiques.
12. Les hypothèses de la question 10 étant toujours satisfaites, représenter, sur une même figure, l'arbelon du tricerle de Mohr des contraintes aux instants $t = 0, t = \frac{t_1}{2}, t = t_1, t = \frac{3t_1}{2}$ et $t = 2t_1$. Vérifier à nouveau qu'il ne peut y avoir apparition de déformations plastiques.
13. L'espace entre le cylindre (\mathcal{C}) et l'enceinte (\mathcal{E}) (i.e. $z \in]H_0, H_0 + e[$) est à présent occupé, à l'instant initial $t = 0$, par un liquide incompressible. Déterminer l'état de contrainte au sein du cylindre. Peut-il y avoir apparition de déformations plastiques?

Problème 2 : Rhéomètre biphérique

On considère le rhéomètre biphérique représenté sur la figure 2. La sphère creuse $S^{(2)}$, de rayon intérieur R_2 ,

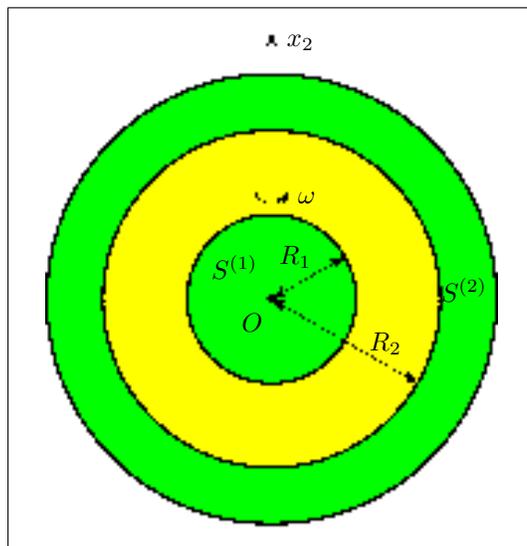


FIG. 2 – Rhéomètre biphérique

est fixe tandis que la sphère pleine $S^{(1)}$, de rayon $R_1 < R_2$, est animée d'un mouvement de rotation uniforme à vitesse angulaire ω autour de l'axe vertical Ox_2 . L'espace compris entre les deux sphères est rempli d'un fluide visqueux newtonien incompressible de viscosité dynamique de cisaillement η . Les actions mécaniques à distance (forces de pesanteur) étant ici négligées, on suppose que le champ des vitesses \mathbf{v} induit dans le fluide par la rotation de la sphère $S^{(1)}$ et exprimé relativement au repère local $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ associé au système de coordonnées sphériques (r, θ, φ) (voir la figure B.3 du polycopié, section B.3.3 page 384) adopte la forme $\mathbf{v}(r, \theta) = v(r, \theta) \vec{e}_\varphi$, où v est une fonction des variables r et θ que l'on cherche ici à déterminer.

1. Vérifier rapidement l'incompressibilité puis montrer que le champ des accélérations $\boldsymbol{\gamma}$ a pour expression $\boldsymbol{\gamma}(r, \theta) = -\frac{v^2(r, \theta)}{r \sin \theta} (\sin \theta \vec{e}_r + \cos \theta \vec{e}_\theta)$.
2. Donner, en fonction de v , r et θ , l'expression du tenseur des taux de déformation \mathbf{D} puis, en fonction cette fois de η , v , r , θ et de la pression p , celle du tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$.
3. De l'équation indéfinie du mouvement en projection sur \vec{e}_φ déduire que v est solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\partial_{rr}^2 v(r, \theta) + \frac{2}{r} \partial_r v(r, \theta) - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} v(r, \theta) + \frac{1}{r^2} \partial_{\theta\theta}^2 v(r, \theta) + \frac{\cot \theta}{r^2} \partial_\theta v(r, \theta) = 0 \quad (1)$$

4. On cherche une solution de l'équation (1) sous la forme $v(r, \theta) = f(r)g(\theta)$, où f et g sont deux fonctions réelles de variable réelle que l'on se propose de déterminer. Montrer alors, en tirant parti des conditions aux limites cinématiques en $r = R_1$, que l'on a $g(\theta) = C \sin \theta$, où C est une constante dont on donnera l'expression en fonction de ω , R_1 et $f(R_1)$.
5. De l'équation aux dérivées partielles (1) et de l'expression de g obtenue à la question 4 déduire que la fonction f est solution de l'équation différentielle ordinaire

$$f''(r) + \frac{2}{r} f'(r) - \frac{2}{r^2} f(r) = 0 \quad (2)$$

6. Montrer que l'équation différentielle ordinaire (2) a pour solution générale $f(r) = Ar + \frac{B}{r^2}$, où A et B sont deux constantes, puis donner l'expression finale de v après avoir tiré parti des conditions aux limites cinématiques en $r = R_2$ et de l'expression de g obtenue à la question 4.

7. Donner, en fonction de ω , η , R_1 et R_2 , l'expression du couple C nécessaire à entretenir le mouvement de rotation uniforme de la sphère $S^{(1)}$. En déduire alors que la mesure de C et ω jointe aux caractéristiques géométriques R_1 et R_2 du rhéomètre permet d'accéder à la valeur de la viscosité η dont on donnera l'expression en fonction des grandeurs précédentes.