

E.N.T.P.E
Département Mathématiques, Informatique et Physique

Cours de Mécanique des Milieux Continus (1^{ère} année)
Devoir numéro 3
Durée 2 heures

Jeudi 16 Décembre 2004

Documents autorisés : Polycopié de cours et notes manuscrites personnelles.

Les archives (i.e. les documents antérieurs au début du cours) ne sont pas autorisées.

Problème 1 : Confinement d'un cylindre

Un cylindre (\mathcal{C}) d'axe de révolution Oz , de rayon R et de hauteur H est soumis, sur sa paroi latérale $\{r = R, z \in [0, H]\}$ et comme l'illustre la figure 1, à une pression $p(z) = p_0(1 - \frac{z}{H})$, où p_0 est une constante strictement positive donnée. Le cylindre (\mathcal{C}) est constitué d'un matériau déformable, homogène et non pesant au comportement élastique linéaire et isotrope, de module d'Young E et de coefficient de Poisson ν .

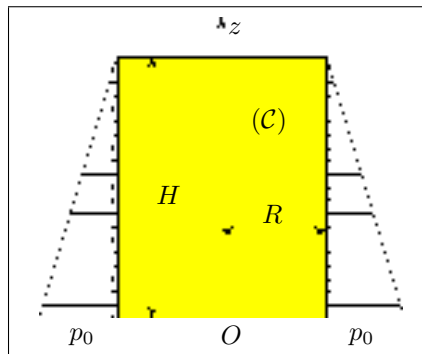


FIG. 1 – Confinement d'un cylindre

Les déplacements radiaux des points du cylindre (\mathcal{C}) situés sur l'axe de révolution Oz sont nuls par raison de symétrie. Le point O de l'axe Oz situé à la cote $z = 0$ est par ailleurs fixe tandis que les déplacements verticaux des autres points de cet axe sont non empêchés. Enfin, les bases inférieure $\{z = 0\}$ et supérieure $\{z = H\}$ du cylindre sont libres de toute action mécanique extérieure de sorte qu'à l'exception du point O les déplacements verticaux y sont non empêchés. On suppose alors, compte tenu de l'ensemble des hypothèses précédentes, que le champ tensoriel des contraintes de Cauchy σ au sein du cylindre (\mathcal{C}), exprimé dans le repère local $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ associé au système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) (voir la figure B.2 du polycopié, section B.3.2 page 381), adopte la forme

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (1)$$

et que σ_{rr} est indépendant de r .

1. De l'équation indéfinie de l'équilibre en projection sur \vec{e}_z jointe aux conditions aux limites sur les bases inférieure $\{z = 0\}$ et supérieure $\{z = H\}$ du cylindre, déduire l'expression de σ_{zz} .
2. Montrer, en tirant parti de l'équation indéfinie de l'équilibre en projection sur \vec{e}_r , que l'on a nécessairement $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{rr}$.

3. Des conditions aux limites sur la paroi latérale $\{r = R, z \in [0, H]\}$ du cylindre déduire l'expression de σ_{rr} .
4. Donner, en tirant parti des résultats obtenus aux questions 1, 2 et 3, l'expression des composantes non nulles du champ tensoriel des petites déformations ε .
5. De l'expression de $\varepsilon_{\theta\theta}$ obtenue à la question 4 déduire celle du déplacement radial u_r . Vérifier que les conditions aux limites aux points de l'axe de révolution Oz sont bien satisfaites.
6. De l'expression de ε_{zz} obtenue à la question 4 déduire, à une fonction près f de la variable r , celle du déplacement vertical u_z .
7. Achever la détermination de u_z en tirant parti de la nullité de la demi-distorsion ε_{rz} ainsi que de la condition aux limites au point O de l'axe Oz situé à la cote $z = 0$.
8. Que deviennent les expressions de u_r et u_z respectivement trouvées aux questions 5 et 7 lorsque $\nu = 0$?

On se propose à présent de retrouver les expressions des déplacements radial u_r et vertical u_z établies à la question 8 (**c'est-à-dire dans le cas où $\nu = 0$**) grâce au théorème de l'énergie potentielle. On pose pour cela $u_r = Ar(1 - \frac{z}{H})$ où A est une constante que l'on se propose de déterminer.

9. Montrer que la nullité de la contrainte de cisaillement σ_{rz} implique $u_z = \frac{Ar^2}{2H} + g(z)$, où g est une fonction inconnue de la variable z .
10. On pose $g(z) = Bz$ où B est une constante arbitraire. Montrer que les champ des déplacements ainsi obtenus sont cinématiquement admissibles puis donner l'expression $\mathcal{J}(A, B)$ de l'énergie potentielle correspondante. En déduire alors l'expression des deux constantes A et B et vérifier que l'on retrouve bien la solution obtenue à la question 8.

Problème 2 : Rhéomètre biphérique

On considère le rhéomètre biphérique représenté sur la figure 2. La sphère creuse $S^{(2)}$, de rayon intérieur R_2 ,

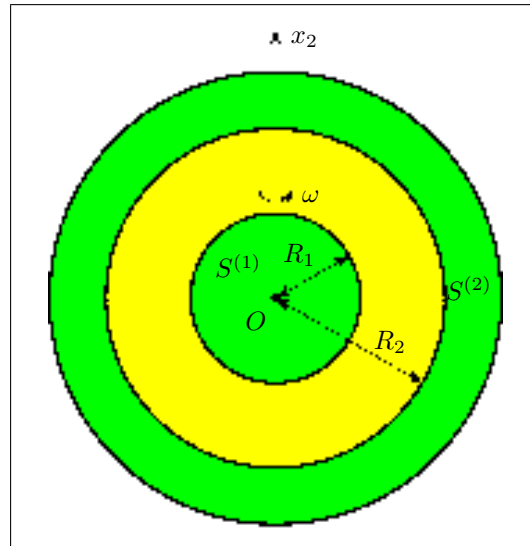


FIG. 2 – Rhéomètre biphérique

est fixe tandis que la sphère pleine $S^{(1)}$, de rayon $R_1 < R_2$, est animée d'un mouvement de rotation uniforme à vitesse angulaire ω autour de l'axe vertical Ox_2 . L'espace compris entre les deux sphères est rempli d'un fluide visqueux newtonien incompressible de viscosité dynamique de cisaillement η . Les actions mécaniques à distance (forces de pesanteur) étant ici négligées, on suppose que le champ des vitesses \mathbf{v} induit dans le fluide par la rotation de la sphère $S^{(1)}$ et exprimé relativement au repère local $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ associé au système de coordonnées

sphériques (r, θ, φ) (voir la figure B.3 du polycopié, section B.3.3 page 384) adopte la forme $\mathbf{v}(r, \theta) = v(r, \theta) \vec{e}_\varphi$, où v est une fonction des variables r et θ que l'on cherche ici à déterminer. Enfin l'on admettra que le champ des accélérations $\boldsymbol{\gamma}$ a pour expression $\boldsymbol{\gamma}(r, \theta) = -\frac{v^2(r, \theta)}{r \sin \theta} (\sin \theta \vec{e}_r + \cos \theta \vec{e}_\theta)$.

1. Donner, en fonction de v , r et θ , l'expression du tenseur des taux de déformation \mathbf{D} puis, en fonction cette fois de η , v , r , θ et de la pression p , celle du tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$.
2. De l'équation indéfinie du mouvement en projection sur \vec{e}_φ déduire que v est solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\partial_{rr}^2 v(r, \theta) + \frac{2}{r} \partial_r v(r, \theta) - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} v(r, \theta) + \frac{1}{r^2} \partial_{\theta\theta}^2 v(r, \theta) + \frac{\cot \theta}{r^2} \partial_\theta v(r, \theta) = 0 \quad (2)$$

3. On cherche une solution de l'équation (2) sous la forme $v(r, \theta) = f(r)g(\theta)$, où f et g sont deux fonctions réelles de variable réelle que l'on se propose de déterminer. Montrer alors, en tirant parti des conditions aux limites cinématiques en $r = R_1$, que l'on a $g(\theta) = C \sin \theta$, où C est une constante dont on donnera l'expression en fonction de ω , R_1 et $f(R_1)$.
4. De l'équation aux dérivées partielles (2) et de l'expression de g obtenue à la question 3 déduire que la fonction f est solution de l'équation différentielle ordinaire

$$f''(r) + \frac{2}{r} f'(r) - \frac{2}{r^2} f(r) = 0 \quad (3)$$

5. Montrer que l'équation différentielle ordinaire (3) a pour solution générale $f(r) = Ar + \frac{B}{r^2}$, où A et B sont deux constantes, puis donner l'expression finale de v après avoir tiré parti des conditions aux limites cinématiques en $r = R_2$ et de l'expression de g obtenue à la question 3.