E.N.T.P.E
Département Mathématiques, Informatique et Physique

Cours de Mécanique des Milieux Continus (1$^{\text{ère}}$ année)
Devoir de rattrapage
Durée 2 heures

Mardi 1$^{\text{er}}$ Mars 2005

Documents autorisés : Polycopié de cours et notes manuscrites personnelles.
Les archives (i.e. les documents antérieurs au début du cours) ne sont pas autorisées.

Problème : Attraction newtonienne et sources internes de chaleur au sein d'une sphère pleine

Une sphère pleine de rayon R est constituée d'un matériau homogène au comportement thermoélastique linéaire isotrope, de module d'Young E, de coefficient de Poisson $\nu = \frac{1}{3}$, de masse volumique ρ et de coefficient de dilatation thermique linéaire β. Les particules de la sphère s'attirant mutuellement selon la loi d'attraction newtonienne, on montre alors (il n'est pas demandé ici de le faire) que celle-ci est soumise à une densité massique de forces $\mathbf{b}$ ayant pour expression, dans le repère orthonormé direct local $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_\varphi})$ associé au système de coordonnées sphériques (r, θ, φ), $\mathbf{b} = -k\frac{r}{R}\overrightarrow{e_r}$ où k est une constante strictement positive donnée de dimension LT^{-2}. La sphère n'est par ailleurs soumise à aucune autre action mécanique extérieure (actions à distance ou actions de surface). Enfin, elle n'est dans un premier temps le siège d'aucune sollicitation thermique, sa température restant alors en tout point égale à celle T_a de l'air ambiant. En d'autres termes, il n'y a dans un premier temps aucune déformation d'origine thermique. On suppose alors, dans tout le problème et compte tenu des symétries de ce dernier, que le champ des déplacements exprimé relativement au système de coordonnées sphériques (r, θ, φ) adopte la forme $\mathbf{u} = u(r)\,\overrightarrow{e_r}$ où u est une fonction inconnue de la variable d'espace r que l'on se propose de déterminer.

1. Donner, en fonction de E, l'expression des modules de Lamé λ et μ.
2. Des équations de Lamé-Navier déduire que u est solution de l'équation différentielle ordinaire
$$u''(r) + 2\frac{u'(r)}{r} - 2\frac{u(r)}{r^2} = Cr \qquad r \in]0, R[\tag{1}$$
avec $C = \frac{2}{3}\frac{\rho k}{ER}$.
3. Montrer que l'équation différentielle ordinaire (1) admet une solution particulière $u^{(1)}(r)$ de la forme $u^{(1)}(r) = ar^\alpha$ puis donner, en fonction de $C = \frac{2}{3}\frac{\rho k}{ER}$ et après avoir évalué α, l'expression de la constante a. Chercher ensuite des solutions $u^{(0)}(r)$ de l'équation homogène associée sous la forme $u^{(0)}(r) = r^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}^\star$. En déduire alors, en fonction de C, r et de deux constantes d'intégration A et B, l'expression générale de $u(r)$.
4. Montrer que l'une des deux constantes d'intégration introduites à la question 3 ne peut être que nulle puis déterminer la seconde après avoir tiré parti des conditions aux limites en contrainte en $r = R$. On exprimera cette dernière en fonction de C et R.
5. Des résultats obtenus aux questions 3 et 4 déduire, en fonction de C, R et r, l'expression finale de $\mathbf{u}$ puis celle des composantes non nulles du tenseur linéarisé des petites déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$. Montrer alors qu'il existe une zone de la sphère où deux particules initialement situées sur un même rayon (i.e. θ et φ constants) se sont rapprochées l'une de l'autre tandis que dans la partie de la sphère complémentaire à cette zone deux particules initialement situées sur un même rayon se sont éloignées l'une de l'autre.

6. Donner, en fonction de ρ, k, R et r, l'expression des composantes non nulles du tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$. Le matériau obéissant au critère de limite élastique de Tresca, déduire alors, en fonction de ρ, k, R et de la limite élastique en traction simple σ_0, la condition de non plastification de la sphère.
7. On se propose à présent d'approcher $u(r)$ par une fonction linéaire $u_{\mathrm{a}}(r) = ar$, $a \in \mathbb{R}$. Donner alors, en tirant parti du théorème de l'énergie potentielle, la valeur optimale de a. Comparer ensuite $u_{\mathrm{a}}(R)$ et $u(R)$. Conclusion ?

La sphère, toujours soumise à la densité massique de forces $\mathbf{b} = -k\frac{r}{R}\overrightarrow{e_r}$, est à présent le siège d'une densité volumique Q donnée de sources internes de chaleur, indépendante des variables d'espace et de temps. Un régime permanent de conduction thermique s'étant établi, la température des particules de la sphère, initialement égale à celle T_{a} de l'air ambiant, devient alors une fonction $T(r)$ de la seule variable d'espace r, solution de l'équation différentielle ordinaire

$$\Lambda\Delta T(r) + Q \;=\; 0 \qquad r \in]0, R[\tag{2}$$

où Δ désigne l'opérateur différentiel laplacien et $\Lambda \in \mathbb{R}^{+\star}$ la conductivité thermique du matériau constituant la sphère.

8. **Question préliminaire** Montrer que pour un matériau thermoélastique homogène et au repos les équations de Lamé-Navier deviennent

$$(\lambda + 2\mu)\mathbf{grad}_x(\mathrm{div}_x\mathbf{u}) - \mu\mathbf{rot}_x(\mathbf{rot}_x\mathbf{u}) - (3\lambda + 2\mu)\beta\mathbf{grad}_x T + \rho\mathbf{b} \;=\; 0 \tag{3}$$

   Indication On tirera avantageusement parti de l'équation 4.77 page 214 du polycopié ainsi que de la démonstration des équations de Lamé-Navier établie en section 5.3.1 du même document.

9. La température des particules de la sphère en contact avec l'air ambiant (i.e. en $r = R$) restant égale à T_{a} donner, après avoir tiré parti de (2) et de l'expression du laplacien en coordonnées sphériques fournie en page 385 du polycopié, l'expression de $T(r)$.
10. Le champ des déplacements adoptant toujours la forme $\mathbf{u} = u(r)\overrightarrow{e_r}$ montrer, en tirant parti des résultats obtenus aux questions 2, 3, 4, 5, 8 et 9, que l'on peut déduire l'expression de $u(r)$ de celle trouvée à la question 5 en substituant simplement à la constante $C = \frac{2}{3}\frac{\rho k}{ER}$ une nouvelle constante C' dont on donnera l'expression en fonction de E, ρ, k, R, β, Q et Λ. En particulier, quelle valeur doit on donner à Q si l'on veut annuler $\mathbf{u}$?

Exercice : Ecoulement sphérique d'un fluide visqueux newtonien

L'écoulement d'un fluide visqueux newtonien de viscosité dynamique de cisaillement η et de masse volumique ρ indépendantes des variables d'espace x_1, x_2 et x_3 est défini par le champ eulérien des vitesses $\mathbf{v}(\vec{x}) = \frac{q}{4\Pi}\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3}$, $\forall\, \vec{x} \in \mathcal{D} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3, \|\vec{x}\| \geq 1\}$, où q est un réel donné.

1. Donner l'expression du tenseur $\mathbf{D}$ des taux de déformation puis en déduire celle du tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$.

   Indication On pourra, afin de simplifier l'écriture, poser $r = \|\vec{x}\|$. On rappelle par ailleurs que $\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r}$, $\forall i \in \{1, 2, 3\}$.

2. Les actions mécaniques à distance étant ici négligées, des équations indéfinies du mouvement et de l'expression de $\boldsymbol{\sigma}$ trouvée à la question 1 déduire celle de la pression p en supposant cette dernière nulle aux points de la sphère unité ayant pour centre l'origine de l'espace physique $\mathbb{R}^3$ (on exprimera p en fonction de ρ, q et $r = \|\vec{x}\|$).