E.N.T.P.E
Département Mathématiques, Informatique et Physique

Cours de Mécanique des Milieux Continus ($1^{\text{ère}}$ année)
Devoir numéro 1
Durée 2 heures

Vendredi 14 Octobre 2005

Documents autorisés : Polycopié de cours et notes manuscrites personnelles.
Les archives (i.e. les documents antérieurs au début du cours) ne sont pas autorisées.

Problème : Transformation plane isochore

Soit $\overline{\Omega}_0 = \{(X_1, X_2) \in \mathbb{R}^2, X_1^2 + X_2^2 \geq 1\}$ l'ensemble des points du plan $\mathbb{R}^2$ privé du disque ouvert unité centré sur l'origine O de ce plan et soit, relativement au repère orthonormé direct $R = (O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$, $\mathcal{F}$ la transformation définie sur $\overline{\Omega}_0 \times \mathbb{R}^+$ par

$$\vec{x} = \mathcal{F}(\vec{X}, t) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & = & X_1 \cos a(R,t) - X_2 \sin a(R,t) \\ x_2 & = & X_1 \sin a(R,t) + X_2 \cos a(R,t) \end{array} \right. \tag{1}$$

où $t \geq 0$ désigne la variable temps, $R = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$, $a(R,t) = \frac{\alpha t^2}{R}$ et où $\alpha > 0$ est une constante donnée de dimension LT^{-2}.

Indications Dans tout le problème et dans le souci d'alléger l'écriture on posera $b(R,t) = \frac{2\alpha t}{R}$ ainsi que $c(R,t) = \frac{\alpha t^2}{R^3}$ et l'on pourra même simplement, sans pour autant oublier leur dépendance vis-à-vis des variables d'espace et de temps, désigner respectivement par a, b et c les grandeurs $a(R,t)$, $b(R,t)$ et $c(R,t)$.

1. Déterminer la nature des trajectoires des particules de $\overline{\Omega}_0$.
2. On s'intéresse aux courbes matérielles constituées, à l'instant $t = 0$, par les cercles de $\overline{\Omega}_0$ centrés sur l'origine du plan $\mathbb{R}^2$. Que deviennent elles à l'instant t ?
3. Reprendre la question 2 en considérant cette fois les courbes matérielles constituées, à l'instant $t = 0$, par les demi-droites de $\overline{\Omega}_0$ d'équations en coordonnées polaires $\Theta = \text{cste}$ (on utilisera avantageusement le système de coordonnées polaires r et θ relatif à la configuration déformée $\overline{\Omega}_t$). Représenter sommairement la transformée à l'instant t de l'une de ces demi-droites.
4. Donner l'expression lagrangienne $\mathbf{v}(\vec{X}, t)$ du champ des vitesses.

5. Inverser la transformation $\mathcal{F}_t$ relative à l'instant t.
6. Des résultats obtenus aux questions 4 et 5 déduire l'expression eulérienne $\mathbf{v}(\vec{x}, t)$ du champ des vitesses. Montrer alors que la transformation de $\overline{\Omega}_0$ est isochore puis donner l'expression des lignes de courant à l'instant t. Quelle réflexion vous inspire ce dernier résultat lorsqu'on le compare à celui de la question 1 ?
7. Donner l'expression $\boldsymbol{\gamma}(\vec{x}, t)$ du champ des accélérations en variables d'Euler puis celle de ses courbes enveloppes (on utilisera avantageusement le système de coordonnées polaires r et θ). Représenter sommairement quelques unes de ces courbes.
8. Déterminer, $\forall \vec{X} \in \Omega_0$ et $\forall t \geq 0$, la transformation linéaire tangente $\mathbf{F}(\vec{X}, t)$. Donner, en la justifiant mais sans pour autant la calculer, la valeur de son déterminant.
9. On se limite, dans cette question, aux points de la demi-droite matérielle $\mathcal{D}_0 \subset \Omega_0$ d'équation $X_2 = 0$ et $X_1 > 1$ à l'instant $t = 0$. Donner alors l'expression de $\mathbf{F}(\vec{X}, t)$ aux points de $\mathcal{D}_0$ et en déduire celle du tenseur de Cauchy à droite $\mathbf{C}$ puis du tenseur de Green-Lagrange $\mathbf{L}$. Déterminer les dilatations ε_{NN} dans les directions $\vec{N} = \vec{e_1}$ et $\vec{N} = \vec{e_2}$ puis montrer que la distorsion γ_{NT} entre ces deux directions est égale à $-\arctan a$. Donner enfin l'expression des valeurs principales de $\mathbf{L}$ puis celle des directions principales de déformation.
10. On suppose à présent que $t \in [0, \mathrm{T}]$, l'instant T étant choisi de façon telle que $\alpha \mathrm{T}^2 \ll 1$. On a donc, $\forall R \geq 1$ et $\forall t \in [0, \mathrm{T}]$, $a \ll 1$. Reprendre, en négligeant les termes d'ordre supérieur ou égal à deux en a, l'expression de $\mathbf{F}$ obtenue à la question 8 et valable $\forall \vec{X} \in \Omega_0$ et $\forall t \geq 0$. En déduire ensuite, $\forall \vec{X} \in \Omega_0$ et $\forall t \in [0, \mathrm{T}]$, celle du tenseur linéarisé des petites déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$. Quelles sont alors les déformations principales et les directions principales de déformation aux points de la droite matérielle $\mathcal{D}_0$ définie à la question 9 ?