E.N.T.P.E
Département Mathématiques, Informatique et Physique

Cours de Mécanique des Milieux Continus ($1^{\text{ère}}$ année)
Devoir numéro 2
Durée 2 heures

Vendredi 18 Novembre 2005

Documents autorisés : Polycopié de cours et notes manuscrites personnelles.
Les archives (i.e. les documents antérieurs au début du cours) ne sont pas autorisées.

Exercice 1 : Cylindre creux soumis à une densité massique radiale de forces Un cylindre creux d'axe de révolution Oz, de rayon intérieur R_0 et de rayon extérieur R_1 est en équilibre sous l'action du champ d'actions mécaniques à distance $\mathbf{b}(\overrightarrow{x}) = -\frac{q}{r^2}\overrightarrow{e_r}$ où q est une constante strictement positive donnée de dimension $\mathrm{L}^3\mathrm{T}^{-2}$. Ce cylindre est constitué d'un matériau homogène de masse volumique ρ ayant un comportement élastique linéaire isotrope, de module d'Young E et de coefficient de Poisson $\nu = 0$. On suppose alors, compte tenu de ces hypothèses et des symétries du problème, que le champ des déplacements exprimé dans le repère local $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$ associé au système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) adopte la forme $\mathbf{u} = u(r)\overrightarrow{e_r}$, où u est une fonction inconnue de la variable d'espace r que l'on se propose de déterminer.

1. Donner, en fonction de u et r, l'expression du tenseur linéarisé des petites déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$ puis en déduire, en fonction cette fois de u, r et E, celle du tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$.
2. Déduire, en tirant parti de la seule équation indéfinie de l'équilibre non trivialement satisfaite, que u est solution de l'équation différentielle ordinaire
$$u''(r) + \frac{u'(r)}{r} - \frac{u(r)}{r^2} = \frac{\rho q}{E r^2} \qquad r \in]R_0, R_1[\tag{1}$$
3. Montrer que l'équation différentielle ordinaire (1) admet une solution particulière $u^{(1)}(r)$ de la forme $u^{(1)}(r) = a$ et donner, en fonction de ρ, q et E, l'expression de la constante a. Chercher ensuite des solutions $u^{(0)}(r)$ de l'équation homogène associée sous la forme $u^{(0)}(r) = r^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}^\star$. En déduire alors, en fonction de ρ, q, E, r et de deux constantes d'intégration A et B, l'expression générale de $u(r)$.
4. On suppose que la paroi intérieure du cylindre ($r = R_0$) n'est soumise à aucune action mécanique de contact et que sa paroi extérieure ($r = R_1$) reste fixe. Ecrire alors les conditions aux limites en $r = R_0$ et $r = R_1$ puis donner, en fonction de ρ, q, E, R_0 et R_1, l'expression des deux constantes d'intégration A et B.
5. De la question 4 déduire, en fonction de ρ, q, E, R_0 R_1 et r, l'expression des composantes non nulles de $\mathbf{u}$ et $\boldsymbol{\varepsilon}$ puis, en fonction cette fois de ρ, q, R_0, R_1 et r, celle des composantes non nulles de $\boldsymbol{\sigma}$.
6. Dans tout ce qui suit on suppose $R_1 = 2R_0$. Représenter les variations des composantes non nulles de $\boldsymbol{\sigma}$ en fonction de r.
7. Le matériau obéissant au critère de limite élastique de Tresca, des résultats de la question 6 déduire, en fonction de ρ, R_0 et de la limite élastique en traction simple σ_0, la valeur q_{e} de q au-delà de laquelle apparaissent les premières déformations plastiques.

Exercice 2 : Ecoulement sphérique d'un fluide visqueux newtonien L'écoulement d'un fluide visqueux newtonien de viscosités dynamiques de volume ξ et de cisaillement η toutes deux constantes est défini par le champ eulérien des vitesses ayant pour expression, dans le repère local $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_\varphi})$ associé au système de coordonnées sphériques (r, θ, φ) (voir la figure B.3, annexe B page 320), $\mathbf{v}(\overrightarrow{x}) = \frac{q}{4\Pi r}\overrightarrow{e_r}$, $\forall\ \overrightarrow{x} \in \mathcal{D} = \{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3, r \geq 1\}$, où q est une constante strictement positive donnée de dimension $\mathrm{L}^2\mathrm{T}^{-1}$.

1. Donner l'expression du tenseur $\mathbf{D}$ des taux de déformation puis en déduire celle du tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$.
2. La masse volumique ρ ne dépendant que de la variable d'espace r (ce qui implique notamment $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$) montrer que l'on a alors $\rho = \frac{k}{r}$ où k est une constante strictement positive de dimension ML^{-2}.
3. Montrer que le champ des quantités d'accélération a pour expression $\rho\boldsymbol{\gamma} = \frac{kq^2}{48\Pi^2}\mathbf{grad}_x \frac{1}{r^3}$
4. Montrer que $\mathbf{div}_x \boldsymbol{\sigma} = -\mathbf{grad}_x p + \frac{(\xi+2\eta)q}{4\Pi}\mathbf{grad}_x \frac{1}{r^2}$
5. Les actions mécaniques à distance étant ici négligées, des équations indéfinies du mouvement et des résultats obtenus aux questions 3 et 4 déduire l'expression de la pression p en supposant cette dernière nulle aux points de la sphère unité ayant pour centre l'origine de l'espace physique $\mathbb{R}^3$ (on exprimera p en fonction de k, q, ξ, η et r). Pour quelle valeur de q a-t-on $\lim\limits_{r \to +\infty} p = 0$? Représenter alors, pour cette valeur de q, les variations de p en fonction de $r \in [1, +\infty[$.

Exercice 3 : Sollicitation thermomécanique d'une poutre Une poutre de longueur L et de section droite rectangulaire, symétrique par rapport au plan (Ox_1, Ox_2), repose sur un bâti indéformable comme l'illustre la figure 1. L'extrémité gauche de la poutre est au contact du bâti tandis que son extrémité droite en est distante de δ, avec $\frac{\delta}{L} \ll 1$. Les déplacements de la poutre dans la direction Ox_3 perpendiculaire au plan (Ox_1, Ox_2) sont par ailleurs non empêchés. Cette poutre, constituée d'un matériau homogène au comportement thermoélastique linéaire isotrope de module d'Young E, de coefficient de Poisson $\nu = \frac{1}{3}$ et de coefficient de dilatation thermique linéaire β, est alors soumise, à partir de l'instant initial $t = 0$, à une augmentation de température $\Delta T = at$ où a est une constante strictement positive donnée de dimension θt^{-1}.

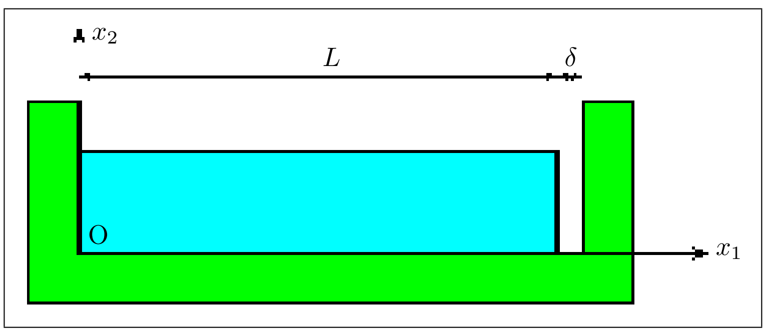

Fig. 1 – Sollicitation thermomécanique d'une poutre

Les actions mécaniques à distance étant ici négligées on suppose qu'en l'absence de frottement entre la poutre et le bâti le champ des déplacements adopte la forme $\mathbf{u} = u_1(x_1,t)\vec{e_1} + u_2(x_2,t)\vec{e_2} + u_3(x_3,t)\vec{e_3}$. La poutre est par ailleurs à chaque instant en état de quasi équilibre, de sorte que les termes d'accélération sont négligeables. Enfin l'on désigne par t_1 l'instant où l'extrémité droite de la poutre entre en contact avec le bâti.

1. Justifier les conditions aux limites cinématiques $u_1(0,t) = 0$, $u_2(0,t) = 0$ et $u_3(0,t) = 0$, $\forall t \geq 0$,
2. Montrer que l'on a, $\forall t \geq 0$, $u_1(x_1,t) = A(t)x_1$, $u_2(x_2,t) = B(t)x_2$ et $u_3(x_3,t) = B(t)x_3$ où A est une fonction à déterminer et où $B(t) = \frac{1}{3}(4\beta at - A(t))$.
3. On suppose $t \in [0, t_1[$. Donner l'expression de $A(t)$ en fonction de β, a et t. En déduire ensuite, en fonction cette fois de δ, a, β et L, celle de t_1.
4. On suppose à présent $t \geq t_1$. Quelle est alors l'expression de $A(t)$?
5. Étudier et représenter les variations en fonction du temps des composantes non nulles du tenseur linéarisé des petites déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$ et du tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$.