

**E.N.T.P.E**  
**Département Mathématiques, Informatique et Physique**

**Cours de Mécanique des Milieux Continus (1<sup>ère</sup> année)**  
**Devoir numéro 3**  
**Durée 2 heures**

**Vendredi 16 Décembre 2005**

**Documents autorisés :** Polycopié de cours et notes manuscrites personnelles.

*Les archives (i.e. les documents antérieurs au début du cours) ne sont pas autorisées.*

**Problème 1 : Mise en rotation d'un fluide de Bingham** Un fluide de Bingham incompressible occupe le domaine  $\mathcal{V}$  de l'espace physique représenté sur la figure 1 et défini, dans le système de coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ , par  $\mathcal{V} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3, r \in [r_0, +\infty[, \theta \in [0, 2\Pi[, z \in [0, h]\}$ . Le fluide est en contact, aux points de sa frontière  $\mathcal{S}_0 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3, r = r_0, \theta \in [0, 2\Pi[, z \in [0, h]\}$ , avec un disque constitué d'un matériau solide indéformable solidaire d'un arbre de torsion (figure 1). Les particules fluides situées sur  $\mathcal{S}_0$  étant adhérentes au disque, l'application d'un couple  $\vec{C} = C\vec{e}_z$  à l'arbre de torsion permet ainsi d'imprimer au fluide un mouvement de rotation d'axe  $Oz$ .

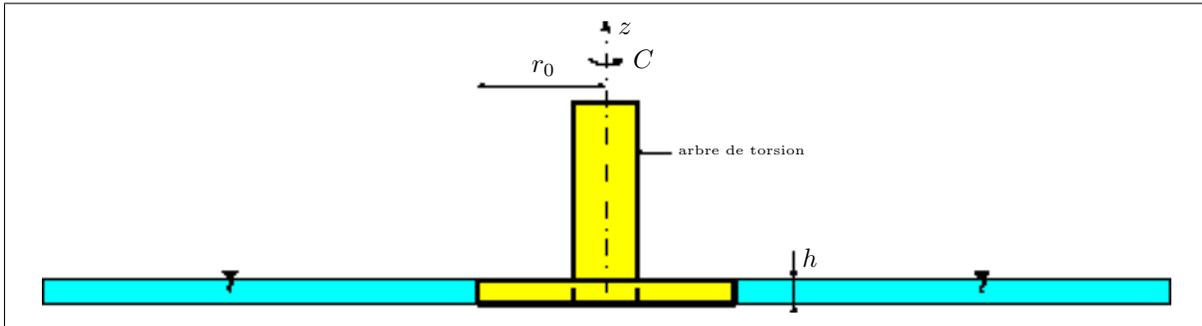


FIG. 1 – Mise en rotation d'un fluide de Bingham

Le comportement de ce fluide visqueux non-newtonien est régi par la relation suivante : alors que pour un fluide visqueux newtonien incompressible le tenseur  $\mathbf{D}$  des taux de déformation est proportionnel à celui des contraintes visqueuses  $\boldsymbol{\sigma}^v$  (i.e.  $\mathbf{D} = \frac{1}{2\eta}\boldsymbol{\sigma}^v$  où  $\eta$  est la viscosité dynamique de cisaillement), on a ici  $\mathbf{D} = Y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\|\boldsymbol{\sigma}^v\| - s_0\right)\frac{1}{2\eta}\left(1 - \frac{\sqrt{2}s_0}{\|\boldsymbol{\sigma}^v\|}\right)\boldsymbol{\sigma}^v$  où  $Y$  désigne la fonction de Heaviside et où  $s_0 > 0$  est une constante mécanique caractéristique du fluide et appelée seuil d'écoulement (certaines pâtes et boues épaisses présentent un tel comportement). L'objectif du problème est de déterminer le couple minimal  $C_0$  déclenchant l'écoulement puis, pour  $C > C_0$ , l'expression du champ des vitesses au sein du fluide. Les actions mécaniques à distance (forces de pesanteur) étant ici négligées, on supposera qu'en régime permanent le champ des vitesses exprimé dans le repère local  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$  associé au système de coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  adopte la forme  $\mathbf{v} = v(r)\vec{e}_\theta$  où  $v$  est une fonction inconnue de la variable  $r$ .

1. Donner la forme du tenseur  $\mathbf{D}$  des taux de déformation puis celle du tenseur des contraintes de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma} = -p\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\sigma}^v$  où  $p$  désigne la pression. Préciser le degré de dépendance des composantes non diagonales de  $\boldsymbol{\sigma}$  vis-à-vis des variables  $r$  et  $z$ .
2. Montrer, si possible sans calculs inutiles, que l'accélération  $\boldsymbol{\gamma}$  est centripète (i.e. de direction opposée à  $\vec{e}_r$ ) et ne dépend que de  $r$ .
3. Des équations indéfinies du mouvement en projection sur  $\vec{e}_r$  et  $\vec{e}_z$  et de la symétrie de révolution du problème déduire que la pression  $p$  ne dépend que de  $r$  (on rappelle que l'on néglige les actions mécaniques à distance).
4. De l'équation indéfinie du mouvement en projection sur  $\vec{e}_\theta$  déduire, en fonction de  $r$  et d'une constante d'intégration  $A$  que l'on ne cherchera pas à déterminer, l'expression de la contrainte de cisaillement  $\sigma_{r\theta}$ .

5. Soit  $R > r_0$ , soit  $\mathcal{V}_R$  le domaine fluide défini par  $\mathcal{V}_R = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3, r \in [r_0, R], \theta \in [0, 2\pi[, z \in [0, h]\}$  et soit  $\mathcal{S}_R = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3, r = R, \theta \in [0, 2\pi[, z \in [0, h]\}$  la frontière extérieure de  $\mathcal{V}_R$ . Donner, en fonction de  $A$  et  $h$ , l'expression du moment résultant, aux points de l'axe  $Oz$ , des actions mécaniques extérieures s'exerçant sur  $\mathcal{S}_R$ . Justifier par ailleurs la nullité du moment résultant, aux points de l'axe  $Oz$ , des quantités d'accélération du domaine fluide  $\mathcal{V}_R$ . De la relation fondamentale de la dynamique appliquée à  $\mathcal{V}_R$  déduire ensuite que l'on a  $\sigma_{r\theta}(r) = \frac{-C}{2\pi hr^2}$ . Quelle est alors, en fonction de  $h$ ,  $r_0$  et  $s_0$ , l'expression du couple minimal  $C_0$  déclenchant l'écoulement ?
6. **Dans tout ce qui suit on suppose  $C > C_0$ .** Montrer, en tirant parti des équations de comportement et de l'expression de  $\sigma_{r\theta}$  trouvée à la question 5, qu'il existe  $r_1 > r_0$  tel que  $v(r) = 0 \quad \forall r \in [r_1, +\infty[$  (on remarquera que  $\lim_{r \rightarrow +\infty} v(r)$  ne peut être infinie). Donner l'expression de  $r_1$  en fonction de  $r_0$ ,  $C$  et  $C_0$ .
7. Montrer que pour  $r \in ]r_0, r_1[$ ,  $v$  est solution de l'équation différentielle  $v'(r) - \frac{v(r)}{r} = \frac{1}{\eta}(s_0 - \frac{C}{2\pi hr^2})$ . Montrer ensuite que cette équation admet une solution particulière de la forme  $v^{(1)}(r) = \frac{a}{r} + br \ln r$  puis en donner la solution générale. Acheter enfin la détermination de  $v$  en tirant parti de la condition aux limites en  $r = r_1$ . Donner enfin l'expression de  $v$  en fonction de  $h$ ,  $\eta$ ,  $C$ ,  $C_0$ ,  $r_0$  et  $r$ .
8. Donner, en fonction de  $h$ ,  $\eta$ ,  $C$ ,  $C_0$  et  $r_0$ , l'expression de la vitesse angulaire  $\omega$  de l'arbre de torsion. Représenter ses variations en fonction de  $C$  et les comparer à celles que l'on obtiendrait pour un fluide visqueux newtonien (i.e. pour  $s_0 = 0$ ).
9. Montrer que la puissance des efforts extérieurs s'exerçant sur le domaine fluide  $\mathcal{V}_{r_1}$  a pour expression  $\mathcal{P}^e = C\omega$ . Du théorème de l'énergie cinétique déduire alors celle de la puissance des efforts intérieurs  $\mathcal{P}^i$  dissipée dans l'écoulement.
10. Montrer que l'on a,  $\forall r \in [r_0, r_1[$ ,  $\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 = c(r)$ . Que vous inspire ce résultat ? **Question bonus subsidiaire** : A quelle condition le théorème de Bernoulli reste-t-il valable pour un fluide visqueux ?

**Problème 2 : Mise en pression d'une cavité sphérique** Une sphère creuse, de rayon intérieur  $r_0$  et de dimension infinie dans la direction radiale  $r$ , est soumise sur sa paroi intérieure ( $r = r_0$ ) à une pression uniforme  $p_0 > 0$ . Cette sphère est constituée d'un matériau homogène et non pesant au comportement élastique linéaire et isotrope, de module de Lamé  $\mu$ . Il obéit par ailleurs au critère de limite élastique de Tresca et l'on désigne par  $\sigma_0$  sa limite élastique en traction simple.

La pression  $p_0$  étant telle que le comportement du matériau reste dans le domaine élastique, on suppose que le champ de déplacement exprimé dans le repère local  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$  associé au système de coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$  adopte la forme  $\mathbf{u} = u(r)\vec{e}_r$ ,  $r \geq r_0$ .

1. Des équations de Lamé-Navier déduire l'équation différentielle dont  $u$  est solution, puis l'intégrer en tirant parti des conditions aux limites en  $r = +\infty$  et  $r = r_0$ . En déduire alors, en fonction de  $p_0$ ,  $\mu$ ,  $r_0$  et  $r$ , l'expression des champs de déplacement, de déformation et de contrainte.
2. Montrer que la solution obtenue à la question 1 reste valable tant que  $p_0 < p_l = \frac{2}{3}\sigma_0$ .

On suppose à présent que  $p_0 \geq p_l$ . Le comportement du matériau est alors parfaitement plastique dans une couronne sphérique  $r \in [r_0, r_1]$ , où  $r_1$  est à déterminer, et élastique au delà.

3. On admet que les seules composantes non nulles du tenseur des contraintes restent  $\sigma_{rr}(r)$  et  $\sigma_{\theta\theta}(r) = \sigma_{\varphi\varphi}(r)$ . Déterminer alors, en tirant parti de l'équation indéfinie de l'équilibre en projection sur  $\vec{e}_r$ , du critère de Tresca ainsi que des conditions aux limites en  $r = r_0$ , l'état de contrainte dans la zone plastifiée  $r \in [r_0, r_1]$ . On donnera les expressions de  $\sigma_{rr}$  et de  $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi}$  en fonction de  $p_0$ ,  $\sigma_0$ ,  $r_0$  et  $r$ .
4. Montrer, en s'appuyant sur les développements de la question 1, que la continuité des contraintes en  $r = r_1$  entraîne  $\sigma_{rr}(r_1) = -2\sigma_{\theta\theta}(r_1) = -p_l$ . En déduire alors l'expression de  $r_1$  en fonction de  $p_0$ ,  $\sigma_0$  et  $r_0$ .
5. Acheter la détermination du champ des contraintes pour  $r \geq r_1$ .
6. **Question bonus subsidiaire** : Retrouver l'expression de  $u$  obtenue à la question 1 en tirant parti du théorème de l'énergie potentielle (on considérera le sous espace des champs de déplacement cinématiquement admissibles de la forme  $\mathbf{u} = \frac{\alpha}{r^2}\vec{e}_r$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ).