

**Convergence et ordre :** Soient  $U$  un ouvert non vide de  $\mathbb{R}$  et  $f$  une fonction  $C^3(U)$ . Il existe alors  $r > 0$  et  $I \subset [\bar{x} - r, \bar{x} + r]$  tel que la fonction  $2(f')^2 - ff''$  ne s'annule pas.

$$H_f(x) = \bar{x} + \frac{h^3}{6} \left( 3 \left( \frac{f''(\bar{x})}{f'(\bar{x})} \right)^2 - \frac{f'''(\bar{x})}{f'(\bar{x})} \right) + O(h^4)$$

Ainsi la méthode est localement convergente d'ordre au moins 3 et  $\bar{x}$  est un point super-attractif.

### 2.3 Approche par une parabole : méthode de Chebychev $C_f(x)$

Soit  $\bar{x}$  une racine simple de  $f$ .

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} \quad C_f(x^{(k)}) &= x^{(k)} - \frac{2f(x^{(k)}) \left( (f'(x^{(k)}))^2 - (f(x^{(k)}))^2 f''(x^{(k)}) \right)}{(f'(x^{(k)}))^3} \\ \Leftrightarrow C_f(x) &= x - \frac{2f(x) \left( (f'(x))^2 + (f(x))^2 f''(x) \right)}{(f'(x))^3} \end{aligned}$$

**Convergence et ordre :** Soient  $U$  un ouvert non vide de  $\mathbb{R}$  et  $f$  une fonction  $C^3(U)$ . Il existe alors  $r > 0$  et  $I \subset [\bar{x} - r, \bar{x} + r]$  tel que la fonction  $2(f')^2 - ff''$  ne s'annule pas.

$$C_f(x) = \bar{x} + \frac{h^3}{6} \left( 3 \left( \frac{f''(\bar{x})}{f'(\bar{x})} \right)^2 - \frac{f'''(\bar{x})}{f'(\bar{x})} \right) + O(h^4)$$

Ainsi la méthode est localement convergente d'ordre au moins 3 et  $\bar{x}$  est un point super-attractif.

## 3 Schémas numériques pour l'approximation des solutions des EDO

### 3.1 Résultats de d'existence et d'unicité

Soient  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  et soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application continue. On considère l'EDO :

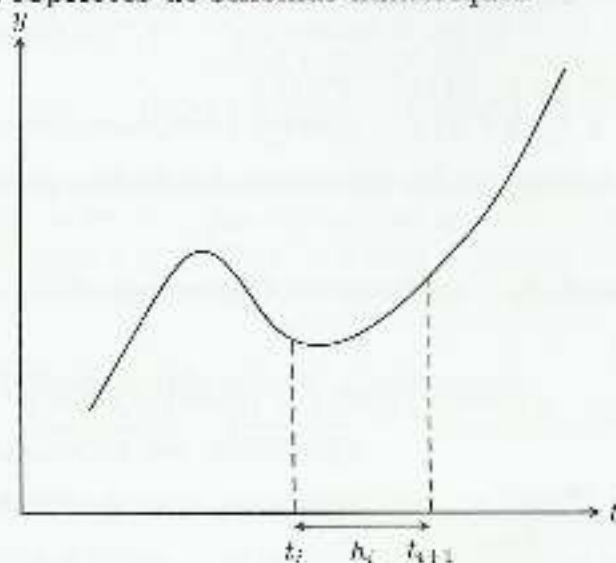
$$\forall (t, y) \in U, y'(t) = f(t, y(t))$$

**Définition :** problème de Cauchy. soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ . On appelle problème de Cauchy la donnée d'une EDO et de ses conditions initiales :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

**Théorème de Cauchy-Lipschitz.** Soit  $\bar{B}(y_0, r_0)$  la boule fermée de centre  $y_0$  et de rayon  $r_0$ . Si  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  est localement lipschitzienne en  $y$ , alors pour tout cylindre de sécurité  $C : [t_0 - T; t_0 + T] \times \bar{B}(y_0, r_0)$  le problème de Cauchy admet une unique solution exacte  $y : [t_0 - T; t_0 + T] \rightarrow U$ . De plus toute suite  $y_n$  de solutions  $\epsilon_p$ -approchées avec  $\epsilon_p \rightarrow 0$  converge uniformément vers la solution exacte  $y$  sur  $[t_0 - T; t_0 + T]$ .

### 3.2 Propriétés de schémas numériques



On discrétise l'espace temps en pas  $h_i = t_{i+1} - t_i$  et on approxime numériquement  $y(t_i)$  par  $y_i$ . On cherche à calculer les  $y(t_i)$  sous la forme :

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(u, y(u)) du$$

Les schémas explicites à un pas se présentent sous la forme :

$$y_{i+1} = y_i + h_i \Phi(t_i, y_i, h_i)$$

#### 3.2.1 Notion de consistance

**Définition.** Un schéma à un pas est dit consistant avec l'EDO  $y' = f(t, y)$  si  $y$  étant solution de cette EDO on a

$$\lim_{k \rightarrow 0} \sum_{j=1}^{n-1} \|y(t_{j+1}) - y(t_j) - h_j \Phi(t_j, y_j, h_j)\| = 0$$

avec  $h = \max_j(h_j)$ . La quantité  $\epsilon_j = y(t_{j+1}) - y(t_j) - h_j \Phi(t_j, y_j, h_j)$  est l'erreur de consistance à l'instant  $t_j$ .

**Propriété.** Un schéma défini par  $\Phi$  est dit consistant avec l'équation  $y' = f(t, y)$  si et seulement si  $\Phi(t, y, 0) = f(t, y)$

### 3.2.2 Notion de stabilité

**Définition.** Un schéma est dit *stable* si  $\forall (y_i, z_i)$ ,

$$\begin{cases} y_0 \\ y_{i+1} = y_i + h_i \Phi(t_i, y_i, h_i) \end{cases} \quad \begin{cases} z_0 \\ z_{i+1} = z_i + h_i \Phi(t_i, z_i, h_i) + \varepsilon_i \end{cases}$$

$$\exists S > 0 / \|y_n - z_n\| \leq S \left( \|y_0 - z_0\| + \sum_{i < n} \|\varepsilon_i\| \right)$$

**Propriété.** Une condition suffisante pour qu'un schéma soit *stable* est que  $\Phi$  soit lipshitzienne en  $y$  :

$$\exists M > 0 / \|\Phi(t, y, h) - \Phi(t, z, h)\| \leq M \|y - z\|$$

avec  $M$  indépendant de  $h$  pour  $h$  suffisamment petit.

### 3.2.3 Notion de convergence

**Théorème de Richtmyer.** Un schéma consistant et stable est convergent.

**Définition.** Un schéma convergent est dit d'ordre  $p$  si,  $y$  étant solution de  $y' = f(t, y)$  on a

$$\frac{y(t+h) - y(t)}{h} - \Phi(t, y, h) = O(h^p)$$

**Théorème.** Un schéma convergent est dit d'ordre au moins  $p$  si,  $y$  étant solution de  $y' = f(t, y)$  on a  $\Phi$  tel que :

$$\frac{\partial^l \Phi}{\partial h^l}(t, y, 0) = \frac{1}{l+1} f^{(l)}(t, y) \quad , \quad 0 \leq l \leq p-1$$

Il est strictement d'ordre  $p$  si en plus :

$$\frac{\partial^p \Phi}{\partial h^p}(t, y, 0) \neq \frac{1}{p+1} f^{(p)}(t, y)$$

## 4 Schémas numériques classiques

### 4.1 Schémas explicites - Runge-Kutta

Les schémas explicites de Runge-Kutta s'écrivent sous la forme :

$$\begin{cases} \Phi(t, y, h) = \sum_{i=1}^s \alpha_i k_i(t, y, h) \\ k_i(t, y, h) = f \left( t + \alpha_i h, y + h \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} k_j(t, y, h) \right) \end{cases} \quad , \quad \alpha_1 = 0$$

**Runge-Kutta d'ordre 1 (RK1) :**

C'est le schéma d'Euler Explicite :  $\Phi(t, y, h) = f(t, y)$

**Runge-Kutta d'ordre 2 (RK2) :**

On obtient une famille de schémas dépendant du paramètre  $\theta$  :

$$\begin{cases} \Phi(t, y, h) = (1 - \theta)k_1(t, y) + \theta k_2(t, y) \\ k_1(t, y) = f(t, y) \\ k_2(t, y) = f\left(t + \frac{h}{2\theta}, y + \frac{h}{2\theta}k_1(t, y)\right) \end{cases}$$

Les deux schémas en déduisant les plus connus sont le schéma de Heun ( $\theta = \frac{1}{2}$ ) et le schéma d'Euler Modifié ( $\theta = 1$ ).

**Runge-Kutta d'ordre 2 (RK4) :**

Les coefficients de la famille de schémas est représentée dans le **tableau de Butcher** :

$$\begin{array}{c|c} \alpha_i & \beta_{ji} \\ \hline & \alpha_j \end{array}$$

Par exemple un des RK4 les plus utilisés est :

$$\begin{cases} \Phi(t, y, h) = \frac{1}{6} (k_1(t, y, h) + 2k_2(t, y, h) + 2k_3(t, y, h) + k_4(t, y, h)) \\ k_1(t, y, h) = f(t, y) \\ k_2(t, y, h) = f\left(t + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}k_1(t, y, h)\right) \\ k_3(t, y, h) = f\left(t + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}k_2(t, y, h)\right) \\ k_4(t, y, h) = f(t + h, y + hk_3(t, y, h)) \end{cases}$$

0	0	0	0	0
1/2	1/2	0	0	0
1/2	0	1/2	0	0
1	0	0	1	0
	1/6	1/3	1/3	1/6

## 4.2 Schémas implicites

Il existe des versions implicites des schémas explicites présentés précédemment, souvent plus stables. Par exemple :

**Euler Implicite :**

$$y_{k+1} = y_k + h_k f(t_k + h_k, y_{k+1})$$

**Crank-Nicholson :**

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h_k}{2} (f(t_k, y_k) + f(t_k + h_k, y_{k+1}))$$

## 5 Annexes

### 5.1 Développements de Taylor

#### 5.1.1 Développement de Taylor à 1 variable d'une fonction à 1 variable

Le développement de Taylor à l'ordre  $p$  de  $f \in C^p$  au voisinage de  $a$  s'écrit :

$$f(x) - f(a) = (x - a)f'(a) + \frac{(x - a)^2}{2} f''(a) + \dots + \frac{(x - a)^p}{p!} f^{(p)}(a) + O((x - a)^{p+1})$$

On peut aussi écrire le reste  $O((x - a)^{p+1}) = \frac{(x - a)^{p+1}}{(p+1)!} f^{(p+1)}(\xi)$  avec  $a < \xi < x$ .

#### 5.1.2 Développement de Taylor à 1 variable d'une fonction à 2 variables

Soit une fonction  $\Phi$  telle que  $\Phi(t, y(t), h) = f(t + \alpha h, y(t) + \beta h f(t, y(t)))$ . Le développement de Taylor de  $\Phi$  à l'ordre 2 en  $h$  au voisinage de 0 s'écrit :

$$\begin{aligned} \Phi(t, y, h) &= f(t, y) + h \left( \alpha \frac{\partial f}{\partial t}(t, y) + \beta f(t, y) \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) \right) \\ &+ h^2 \left( \alpha^2 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t, y) + 2\alpha\beta \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(t, y) + \beta^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t, y) \right) + O(h^3) \end{aligned}$$

### 5.2 Calculs pratiques d'ordre de convergence

#### 5.2.1 Ordre méthode itérative

Soit l'itération  $x^{(k+1)} = G(x^{(k)})$  et  $\bar{x}$  un point fixe de  $G$ . Alors le développement de Taylor de  $G$  autour de  $\bar{x}$  s'écrit, en posant  $\epsilon = x - \bar{x}$  :

$$G(x) = G(\bar{x}) + \epsilon G'(\bar{x}) + O(\epsilon^2) = \bar{x} + \epsilon G'(\bar{x}) + O(\epsilon^2)$$

Le premier degré de dérivation de  $G$  en  $\bar{x}$  non nul donne l'ordre de la méthode itérative.

### 5.2.2 Ordre de convergence schéma numérique

Soit l'EDO  $y'(t) = f(t, y(t))$ .

$$\begin{cases} y(t+h) = y(t) + hf'(t) - \frac{h^2}{2} y''(t) + O(h^3) \\ y'(t) = f(t, y(t)) = f^{(0)}(t, y(t)) \\ y''(t) = \frac{\partial f}{\partial t} + f \frac{\partial f}{\partial y} = f^{(1)}(t, y(t)) \end{cases}$$

Soit un schéma numérique défini par la fonction  $\Phi(y, t, h)$  tel que :

$$y_{i+1} = y_i + h_i \Phi(y_i, t_i, h_i)$$

Soit on fait le développement de Taylor de  $\Phi(t, y, h)$  pour la variable  $h$  autour de 0 et l'ordre de convergence du schéma numérique est l'entier  $p$  tel que :

$$\frac{y(t+h) - y(t)}{h} - \Phi(y, t, h) = O(h^p)$$

Soit on calcule les dérivées successives de  $\Phi(t, y, 0)$  par rapport à  $h$  et l'ordre de convergence du schéma numérique est le premier entier  $p$  tel que

$$\frac{\partial^p \Phi}{\partial h^p}(t, y, 0) \neq \frac{1}{p+1} f^{(p)}(t, y)$$