E.N.T.P.E
Département Mathématiques, Informatique et Physique

Cours de Mécanique des Milieux Continus (1$^{\text{ère}}$ année)
Devoir numéro 1
Durée 2 heures

Vendredi 13 Octobre 2006

Documents autorisés : Polycopié de cours et notes manuscrites personnelles.
Les archives (i.e. les documents antérieurs au début du cours) ne sont pas autorisées.

Problème : Transformation plane isochore

La transformation plane d'un milieu continu est caractérisée, dans l'espace physique $\mathbb{R}^2$ rapporté au repère orthonormé direct $R = (O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$, par le champ ***eulérien*** des vitesses :

$$\mathbf{v} = x_2 x_1^2 \vec{e_1} - x_1 x_2^2 \vec{e_2} \tag{1}$$

1. Montrer que cette transformation s'effectue à volume constant.
2. Donner l'expression des lignes de courant. En déduire alors la nature des trajectoires des particules. Représenter quelques unes de ces trajectoires en précisant le sens de parcours des particules.
3. Donner l'expression du tenseur gradient des vitesses $\mathbf{G}$ puis celles des tenseurs des taux de déformation $\mathbf{D}$ et de rotation $\mathbf{W}$.
4. Déterminer le tourbillon des vitesses $\overset{\leadsto}{w} = \frac{1}{2}\mathbf{rot}_x\mathbf{v}$.
5. De la relation $\boldsymbol{\gamma} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{G}.\mathbf{v}$ déduire l'expression eulérienne du champ des accélérations $\boldsymbol{\gamma}$. Quelles sont alors les courbes enveloppes de ce champ ?
6. Déterminer le lieu des points tels que $\mathbf{v}.\boldsymbol{\gamma} = 0$.
7. On désigne par X_1 et X_2 les coordonnées des particules à l'instant initial $t = 0$. De la résolution du système différentiel $\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{v}$ déduire l'expression de la transformation $\mathcal{F}_t$ relative à l'instant t.
   Indication On distinguera les cas $X_1 X_2 = 0$ et $X_1 X_2 \neq 0$. On tirera par ailleurs parti du résultat obtenu à la question 2.
8. En tirant parti de la relation $\frac{\mathrm{d}^2\vec{x}}{\mathrm{d}t^2} = \boldsymbol{\gamma}$ et de l'expression de la transformation $\mathcal{F}_t$ obtenue à la question 7 retouver l'expression de l'accélération $\boldsymbol{\gamma}$ trouvée à la question 5.

9. Montrer que la transformation linéaire tangente a pour expression

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} (1 + X_1 X_2 t)\, \mathrm{e}^{X_1 X_2 t} & X_1^2 t\, \mathrm{e}^{X_1 X_2 t} \\ -X_2^2 t\, \mathrm{e}^{-X_1 X_2 t} & (1 - X_1 X_2 t)\, \mathrm{e}^{-X_1 X_2 t} \end{bmatrix} \tag{2}$$

puis retrouver alors la propriété établie à la question 1.

10. On se propose d'étudier, dans cette question, l'état de déformation au point de coordonnées initiales $(X_1 = 1, X_2 = 0)$ et à l'instant t.
    (a) Donner l'expression de la transformation linéaire tangente **F** en ce point et à cet instant puis celles des tenseurs de Cauchy à droite **C** et de Green-Lagrange **L**.
    (b) Déterminer les dilatations dans les directions $\vec{N}=\vec{e_1}$ et $\vec{T}=\vec{e_2}$ puis montrer que la distorsion γ_{NT} entre ces deux directions initialement orthogonales est égale à $\arctan t$.
    (c) Soit θ l'angle orienté, en ce point et à cet instant, entre la direction $\vec{N}=\vec{e_1}$ et la direction principale majeure $\vec{I_1}$ du tenseur de Cauchy à droite **C**. Déterminer la plus grande valeur propre de **C** puis montrer que $\theta = \arctan \frac{\sqrt{4+t^2}+t}{2}$.
    (d) Soit à présent θ' l'angle orienté entre la direction $\vec{N}=\vec{e_1}$ et la direction principale majeure $\vec{i_1}$ du tenseur de Cauchy à gauche $\mathbf{B} = \mathbf{F}.{}^{\mathrm{t}}\mathbf{F}$. En adoptant la même démarche qu'à la question 10c montrer que $\theta' = \arctan \frac{\sqrt{4+t^2}-t}{2}$.
    (e) Des résultats obtenus aux questions 10c et 10d déduire alors que la rotation **R** en ce point et à cet instant a pour angle $\alpha = \arctan \frac{-t}{2}$.
    (f) De l'expression de **F** trouvée à la question 10a ainsi que du résultat obtenu à la question 10e déduire enfin l'expression de la déformation pure avant rotation **U**.

11. Déterminer la ligne d'émission à l'instant t du point M de coordonnées $x_1 = x_2 = 1$.

12. Soit $\mathcal{D}_0$ la droite matérielle d'équation $X_1 = 1$ à l'instant initial $t = 0$. Déterminer et représenter sa transformée $\mathcal{D}_t$ à l'instant t. Retrouver ensuite, en considérant la transformée à l'instant t de la droite matérielle d'équation $X_2 = 0$ à l'instant initial $t = 0$, l'expression de la distorsion γ_{NT} obtenue à la question 10b.

13. De la représentation de $\mathcal{D}_t$ faite à la question 12 jointe aux symétries du problème déduire la transformée, à l'instant t, du carré matériel ayant comme sommets, à l'instant initial $t = 0$, les points de coordonnées $(X_1 = 1, X_2 = 1)$, $(X_1 = -1, X_2 = 1)$, $(X_1 = -1, X_2 = -1)$ et $(X_1 = 1, X_2 = -1)$.