E.N.T.P.E
Département Mathématiques, Informatique et Physique

Cours de Mécanique des Milieux Continus ($1^{\text{ère}}$ année)
Devoir numéro 2
Durée 2 heures

Vendredi 17 Novembre 2006

Documents autorisés : Polycopié de cours et notes manuscrites personnelles.
Les archives (i.e. les documents antérieurs au début du cours) ne sont pas autorisées.

Problème : Sollicitation thermomécanique d'un cylindre

Un cylindre $(\mathcal{C})$ d'axe de révolution Oz, de rayon R_0 et de hauteur H_0 est enfermé dans une enceinte cylindrique creuse $(\mathcal{E})$ de même axe de révolution Oz, de hauteur intérieure égale à la hauteur de $(\mathcal{C})$ et de rayon intérieur $R = R_0 + e$, avec $\frac{e}{R_0} \ll 1$, comme le représente la figure 1. L'enceinte $(\mathcal{E})$ est constituée d'un matériau **non déformable** tandis que le cylindre $(\mathcal{C})$ est un solide déformable, homogène et non pesant au comportement thermoélastique linéaire et isotrope, de module d'Young E, de coefficient de Poisson ν et de coefficient de dilatation thermique linéaire β.

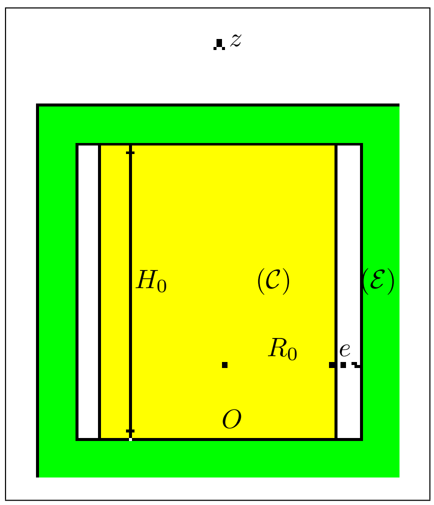

FIG. 1 – Sollicitation thermomécanique d'un cylindre

Le cylindre $(\mathcal{C})$ est soumis, à partir de l'instant initial $t = 0$, à une augmentation progressive $\Delta T(t) = at$ de sa température, où a est une constante donnée et strictement positive, de dimension $\theta \mathrm{T}^{-1}$. Les interfaces entre l'enceinte $(\mathcal{E})$ et les sections inférieure $z = 0$ et supérieure $z = H_0$ du cylindre $(\mathcal{C})$ sont par ailleurs parfaitement lisses, de sorte que les déplacements radiaux de $(\mathcal{C})$ ne sont pas empêchés.

On suppose alors, compte tenu de l'ensemble des hypothèses précédentes, que le champ des déplacements $\mathbf{u}$ du cylindre $(\mathcal{C})$, exprimé dans le repère local $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$ associé au système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) (voir la figure B.2 du cours, section B.3.2 page 318), adopte la forme $\mathbf{u}(r, z, t) = u_r(r, t)\,\vec{e_r} + u_z(z, t)\,\vec{e_z}$, où u_r et u_z sont des fonctions inconnues dépendant respectivement des variables r et z ainsi que de la variable temps. On admet toutefois qu'à chaque instant le cylindre $(\mathcal{C})$ se trouve dans un état de quasi-équilibre et que **l'accélération est négligeable**. On désigne par ailleurs par $\boldsymbol{\varepsilon}$ et $\boldsymbol{\sigma}$, respectivement, les champs tensoriels des petites déformations et des contraintes de Cauchy au sein du cylindre $(\mathcal{C})$ et l'on choisit la pression atmosphérique ambiante p_{atm} comme origine des contraintes (i.e. $p_{\mathrm{atm}} = 0$). Enfin, on désigne par t_1 la valeur de t où la paroi latérale $r = R_0$ du cylindre $(\mathcal{C})$ entre en contact avec l'enceinte $(\mathcal{E})$.

1. On suppose $0 \leq t < t_1$. Que vaut alors la contrainte normale σ_{rr} en $r = R_0$? Quel est son signe si $t > t_1$?
2. Donner, en fonction de u_r, u_z et r, l'expression des composantes non nulles de $\boldsymbol{\varepsilon}$ puis, en fonction cette fois de u_r, u_z, r, β, ΔT et des modules de Lamé λ et μ, celles des composantes non nulles de $\boldsymbol{\sigma}$.
3. Soit t un instant quelconque mais fixé. De l'équation indéfinie de l'équilibre en projection sur $\vec{e_r}$ déduire l'équation différentielle ordinaire que doit satisfaire u_r à cet instant puis montrer, en tirant notamment parti des conditions aux limites cinématiques en $r = 0$, que l'on a $u_r = A(t)r$, où A est une fonction de la variable temps restant à déterminer.
4. Soit t un instant quelconque mais fixé. De l'équation indéfinie de l'équilibre en projection sur $\vec{e_z}$ déduire l'équation différentielle ordinaire que doit satisfaire u_z à cet instant puis montrer, en tirant parti des conditions aux limites en $z = 0$, que l'on a $u_z = B(t)z$ où B est une fonction de la variable temps restant à déterminer.
5. Des résultats obtenu aux questions 2, 3 et 4 déduire que les contraintes normales σ_{rr} et $\sigma_{\theta\theta}$ sont en tout point égales et ne dépendent que de la variable temps.
6. On se propose de montrer (ce que suggère évidemment l'intuition) que l'on a $u_z(H_0, t) = 0, \forall t \geq 0$. Justifier tout d'abord, en quelques mots, que l'on ne peut avoir $u_z(H_0, t) > 0$. En supposant ensuite $u_z(H_0, t) < 0$, que peut-on dire de la section supérieure $z = H_0$ du cylindre puis de la valeur de la contrainte normale σ_{zz} au sein de ce dernier ? Montrer alors, après avoir tiré parti des équations de la thermoélasticité linéaire isotrope, de la définition de la déformation axiale ε_{zz} ainsi que des résultats obtenus aux question 1 et 5, que l'on aboutit à une contradiction puis conclure.
7. Soit t un instant quelconque mais fixé. Des résultats obtenus aux questions 4 et 6 déduire que l'on a nécessairement $u_z = 0$.
8. Donner, en fonction de A, λ, μ, β, a et t, l'expression des composantes non nulles de $\boldsymbol{\varepsilon}$ et $\boldsymbol{\sigma}$.
9. Dans cette question on suppose $0 \leq t < t_1$. Donner alors , en fonction de ν, β, a et t et après avoir tiré parti du résultat obtenu à la question 1, l'expression de A. En déduire ensuite, en fonction de E, ν, β, a et t, celle des composantes non nulles de $\boldsymbol{\varepsilon}$ et $\boldsymbol{\sigma}$.
10. Donner, en fonction de ν, e, R_0, β et a, l'expression de t_1.
11. On suppose à présent que le matériau constituant le cylindre obéit au critère de limite élastique de Tresca et l'on désigne par σ_0 la limite élastique en traction simple. Pour $0 \leq t < t_1$ quelle est, en fonction de σ_0, E et β, l'expression de l'élévation maximale $\Delta T_{\max}$ de température que peut supporter le cylindre si l'on veut éviter l'apparition de déformations plastiques. Montrer alors que l'on ne peut avoir $t = t_1$ sans plastification que si le ratio $k = \frac{e}{R_0}$ n'excède pas une valeur $k_{\max}$ dont on donnera l'expression en fonction de ν, E et σ_0.
   Application numérique Donner la valeur de $k_{\max}$ pour $E = 200000\,\text{MPa}$, $\sigma_0 = 300\,\text{MPa}$ et $\nu = 0.3$. Conclusion.
12. On suppose à présent $k < k_{\max}$ et $t \geq t_1$. Qelle est alors, en fonction de e et R_0, l'expression de A ? Quelle est son expression, en fonction cette fois de ν, β, a et t_1. En déduire ensuite, en fonction de E, ν, β, a, t_1 et t, celle des composantes non nulles de $\boldsymbol{\sigma}$ et montrer qu'il ne peut y avoir apparition de déformations plastiques. Dire pourquoi ce dernier résultat était prévisible.
13. On suppose toujours $k < k_{\max}$. Représenter alors, sur une même figure et pour $\nu = \frac{1}{3}$, l'arbelon du tricercle de Mohr des contraintes aux instants $t = 0$, $t = \frac{t_1}{2}$, $t = t_1$, $t = \frac{3t_1}{2}$ et $t = 2t_1$. Retrouver le fait qu'il ne peut y avoir apparition de déformations plastiques.
14. Le ratio $k = \frac{e}{R_0}$ n'étant plus soumis à la condition $k < k_{\max}$, l'espace entre le cylindre $(\mathcal{C})$ et l'enceinte $(\mathcal{E})$ (i.e. $r \in]R_0, R_0 + e[$) est à présent occupé, à l'instant initial $t = 0$, par un liquide incompressible. Déterminer l'état de contrainte au sein du cylindre. Peut-il y avoir apparition de déformations plastiques ?