E.N.T.P.E
Département Mathématiques, Informatique et Physique

Cours de Mécanique des Milieux Continus (1$^{\text{ère}}$ année)
Devoir numéro 3
Durée 2 heures

Mardi 19 Décembre 2006

Documents autorisés : Polycopié de cours et notes manuscrites personnelles.
Les archives (i.e. les documents antérieurs au début du cours) ne sont pas autorisées.

Problème : Écoulement d'un fluide visqueux non newtonien dans une conduite cylindrique en caoutchouc

On s'intéresse à l'écoulement rectiligne et permanent d'un fluide visqueux non newtonien et incompressible dans une conduite cylindrique en caoutchouc, d'axe de révolution Oz, de rayon intérieur r_0 et de rayon extérieur r_1 (figure 1). La paroi extérieure $r = r_1$ de cette conduite est solidaire d'une dalle en béton supposée indéformable. La première partie du problème est consacrée à l'étude de l'écoulement du fluide, tandis que la seconde est dédiée à l'analyse des déplacements et des contraintes induits par cet écoulement dans la conduite.

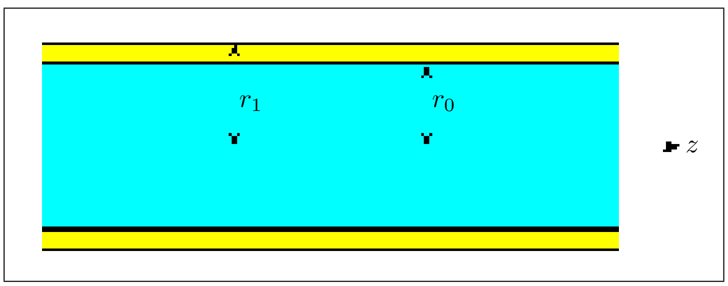

Fig. 1 – Écoulement d'un fluide visqueux non newtonien dans une conduite cylindrique en caoutchouc

1 Première partie : étude de l'écoulement

Le comportement du fluide visqueux non-newtonien et incompressible est régi par la relation suivante : alors que pour un fluide visqueux newtonien incompressible le tenseur $\mathbf{D}$ des taux de déformation est proportionnel à celui des contraintes visqueuses $\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{v}}$ (i.e. $\mathbf{D} = \frac{1}{2\eta}\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{v}}$ où η est la viscosité dynamique de cisaillement), on a ici $\mathbf{D} = \frac{1}{2\eta}\frac{\|\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{v}}\|}{\sqrt{2}\,\tau}\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{v}}$ où $\tau > 0$ est une constante mécanique caractéristique du fluide.

Les actions mécaniques à distance (forces de pesanteur) étant ici négligées, on suppose que le champ des vitesses exprimé dans le repère local $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$ associé au système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) adopte la forme $\mathbf{v} = v(r,z)\,\overrightarrow{e_z}$ où v est une fonction inconnue des variables r et z que l'on se propose à présent de déterminer.

1. Montrer qu'en fait v ne dépend que de r. En déduire alors la forme du tenseur $\mathbf{D}$ des taux de déformation puis celle du tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma} = -p\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{v}}$, où p désigne la pression. Préciser le degré de dépendance des composantes non diagonales de $\boldsymbol{\sigma}$ vis-à-vis des variables r et z (on ne cherchera pas à exprimer ces composantes en fonction de v).

2. Des équations indéfinies du mouvement déduire que la pression p ne dépend que de z et que son gradient est constant. On pose, dans tout ce qui suit, $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = -G$ et l'on choisit $G > 0$ de façon à ce que le fluide s'écoule dans le sens des z positifs. Quelle est alors, en fonction de G, z et de $p_0 = p(0)$, l'expression de $p(z)$.
3. Déduire des résultats de la question 2 l'expression de σ_{rz}.
4. Des équations de comportement et des conditions aux limites cinématiques en $r = r_0$ déduire alors, en fonction de G, η, τ, r_0 et r, l'expression de $v(r)$.
   Indication La paroi extérieure $r = r_1$ de la conduite étant solidaire d'une dalle en béton supposée indéformable et l'écoulement du fluide étant permanent, le caoutchouc constituant cette conduite, bien que déformé sous l'effet de l'écoulement, se trouve néanmoins dans un état d'équilibre.
5. Donner, en fonction de G, η, τ et r_0, l'expression du débit volumique Q à travers les sections droites de la conduite, puis exprimer ce dernier en fonction de r_0 et v_0, où v_0 désigne la vitesse du fluide aux points de l'axe Oz.
6. Des résultats de la question 3 déduire, en fonction de G et r_0, l'expression de la force de frottement $\vec{F}$ par unité de longueur qu'exerce le fluide sur les parois de la conduite.
7. Retrouver le résultat obtenu à la question 6 grâce au théorème d'Euler.
8. Donner l'expression du tenseur des taux de déformation $\mathbf{D}$ puis calculer, en fonction de G, η, τ et r_0, la puissance des efforts intérieurs dissipée par unité de longueur dans l'écoulement. Donner ensuite l'expression de cette puissance en fonction de G et du débit volumique Q.
9. Retrouver le résultat obtenu à la question 8 grâce au théorème de l'énergie cinétique.

2 Seconde partie : étude de la conduite

Le caoutchouc constituant la conduite est supposé élastique linéaire isotrope et incompressible, de module d'Young E, si bien que l'on a $\boldsymbol{\sigma} = \sigma_m \boldsymbol{\delta} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}$ où $\boldsymbol{\sigma}$ désigne le tenseur des contraintes de Cauchy, $\sigma_m = \frac{1}{3}\boldsymbol{\sigma}$ la contrainte moyenne, $\boldsymbol{\varepsilon}$ le tenseur linéarisé des petites déformations et où $\mu = \frac{1}{3}E$.

Les actions mécaniques à distance (forces de pesanteur) étant ici négligées, on suppose que le champ des déplacements exprimé dans le repère local $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$ associé au système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) adopte la forme $\mathbf{u} = u(r, z)\, \vec{e_z}$ où u est une fonction inconnue des variables r et z que l'on se propose à présent de déterminer.

10. Montrer que u ne dépend que de r.
11. Des équations de Lamé-Navier déduire que la contrainte moyenne σ_m ne dépend que de z. Montrer alors, après avoir tiré parti de la continuité de la contrainte radiale σ_{rr} à l'interface fluide-solide $r = r_0$, que l'on a $\sigma_m = Gz - p_0$, où G et p_0 sont les grandeurs introduites à la question 2.
12. Des équations de Lamé-Navier déduire à présent l'équation différentielle ordinaire dont u est solution. Résoudre ensuite cette équation en tirant parti de la continuité de la contrainte de cisaillement σ_{rz} à l'interface fluide-solide $r = r_0$, puis des conditions aux limites cinématiques en $r = r_1$ (on rappelle que la paroi extérieure $r = r_1$ de la conduite est solidaire d'une dalle en béton supposée indéformable). On exprimera u en fonction de E, G, r_1 et r.
13. On cherche à approcher le déplacement $\mathbf{u}$ par un champ de la forme $\mathbf{w} = w(r)\vec{e_z}$ avec $w(r) = A(r_1 - r)$. Vérifier qu'un tel champ est cinématiquement admissible puis déterminer, grâce au théorème de l'énergie potentielle, la valeur de la constante A. On donnera l'expression de A en fonction de E, G, r_1 et r_0.
14. On s'intéresse enfin à l'erreur relative $e = |\frac{u(r_0) - w(r_0)}{u(r_0)}|$. Montrer que e ne dépend que du ratio $k = \frac{r_1}{r_0}$ puis étudier ses variations en fonction de k.
    Application numérique Donner la valeur de e lorsque $r_1 = 2''$ et $r_0 = 1\frac{3}{4}''$