# E.N.T.P.E
# Département Mathématiques, Informatique et Physique

**Cours de Mécanique des Milieux Continus (1ère année)**
**Devoir de rattrapage**
**Durée 2 heures**

**Mardi 6 Février 2007**

**Documents autorisés :** Polycopié de cours et notes manuscrites personnelles.
*Les archives (i.e. les documents antérieurs au début du cours) ne sont pas autorisées.*

**Problème : Sollicitation thermomécanique d'une sphère creuse** Une sphère creuse de rayon intérieur $R_0$ et de rayon extérieur $R_1$ (figure 1) est constituée d'un matériau métallique au comportement thermoélastique linéaire isotrope, de module d'Young $E$, de coefficient de Poisson $\nu = \frac{1}{3}$ et de coefficient de dilatation thermique linéaire $\beta$. La température de cette sphère est initialement uniforme et égale à $T_0$ et l'on admettra que dans cet état initial, sous l'action des forces gravifiques et de la pression ambiante, les champs tensoriels des petites déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$ et des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ sont nuls. La paroi intérieure de la sphère ($r = R_0$) restant libre de toute autre action mécanique et sa température étant maintenue égale à $T_0$, la paroi extérieure ($r = R_1$), mise au contact d'un fluide, se trouve portée à la température uniforme $T_1$ tout en étant soumise à une pression $p_1$ également uniforme (voir la figure 1). On suppose alors, compte tenu des symétries du problème, que le champ des déplacements exprimé dans le repère local $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_\varphi})$ associé au système de coordonnées sphériques $(r, \theta, \varphi)$ adopte la forme $\mathbf{u} = u(r)\vec{e_r}$, où $u$ est une fonction inconnue de la variable d'espace $r$ que l'on se propose de déterminer, tandis que la température $T$ est une fonction également inconnue de cette même variable d'espace.

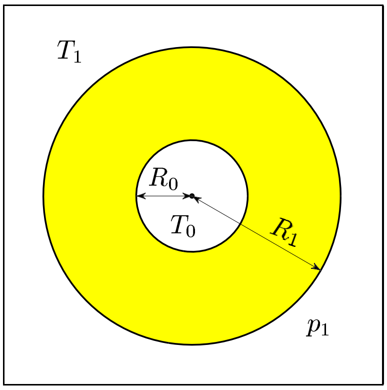


Fig. 1 – Sollicitation thermomécanique d'une sphère creuse

1. Montrer que les modules de Lamé $\lambda$ et $\mu$ satisfont la relation $\lambda = 2\mu$ et donner l'expression de $\lambda$ en fonction de $E$.
2. En régime stationnaire, en l'absence de sources internes de chaleur et pour un matériau aux propriétés thermiques homogènes, l'équation de la chaleur se réduit à $\Delta T = 0$, où $\Delta$ désigne ici l'opérateur scalaire laplacien. En déduire alors, en fonction de $r$ et de deux constantes d'intégration $A$ et $B$, l'expression de la température $T$.
3. Donner, après avoir tiré parti des conditions aux limites thermiques en $r = R_0$ et $r = R_1$, l'expression finale de $T(r)$.
4. Dans tout ce qui suit on désigne à présent par $\Delta T$ le champ des écarts entre les températures finale et initiale aux points de la sphère. En d'autres termes on a $\Delta T(r) = T(r) - T_0$, $\forall r \in [R_0, R_1]$. Montrer alors, après avoir calculé $\Delta T(r)$, que les dilatations thermiques $\beta\Delta T(r)$ adoptent la forme $\beta\Delta T(r) = C(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{r})$ où $C$ est une constante dont on donnera l'expression en fonction de $\beta$, $T_0$, $T_1$, $R_0$ et $R_1$.
5. Par un raisonnement simple montrer que même lorsque $p_1 = 0$ le champ tensoriel des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ ne peut être nul en tout point de la sphère dès lors que $T_1 \neq T_0$.
6. Donner, en fonction de $r$ et du déplacement radial inconnu $u$, l'expression des composantes non nulles du tenseur linéarisé des petites déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$, puis, en fonction cette fois de $r$, $u$, $\lambda$, $C$ et $R_0$, celles du tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$.

7. Montrer, en tirant parti de la seule équation indéfinie de l'équilibre non trivialement satisfaite ainsi que des résultats de la question 6, que $u$ est solution de l'équation différentielle ordinaire

$$u''(r) + 2\frac{u'(r)}{r} - 2\frac{u(r)}{r^2} \;=\; 2\frac{C}{r^2} \qquad r \in ]R_0, R_1[ \tag{1}$$

8. Montrer que l'équation différentielle ordinaire (1) admet une solution particulière $u^{(1)}(r)$ de la forme $u^{(1)}(r) = a$ et donner, en fonction de $C$, l'expression de la constante $a$. Chercher ensuite des solutions $u^{(0)}(r)$ de l'équation homogène associée sous la forme $u^{(0)}(r) = r^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}^\star$. En déduire alors, en fonction de $C$, $r$ et de deux constantes d'intégration $A$ et $B$, l'expression générale de $u(r)$.
9. Des résultats obtenus aux questions 6 et 8 déduire, en fonction de $\lambda$, $C$, $r$, $R_0$ et des deux constantes d'intégration $A$ et $B$, l'expression des composantes non nulles de $\boldsymbol{\sigma}$.
10. Des résultats de la question 9 ainsi que des conditions aux limites en contrainte en $r = R_0$ et $r = R_1$ déduire qu'il est possible d'ajuster la pression extérieure $p_1$ de telle sorte que $u$ soit une fonction affine de $r$. Donner alors, en fonction de $\lambda$, $\beta$, $T_0$ et $T_1$, l'expression de $p_1$.
11. Dans tout ce qui suit on suppose que la pression $p_1$ satisfait la relation trouvée à la question 10. Achever alors la détermination du déplacement radial $u$ que l'on exprimera en fonction de $r$ et des constantes $\beta$, $T_0$, $T_1$, $R_0$ et $R_1$.
12. On souhaite que le déplacement soit nul en $r = R_1$. Quelle valeur doit on alors donner au rayon extérieur $R_1$ de la sphère ?
13. Le rayon extérieur $R_1$ de la sphère ayant la valeur trouvée à la question 12, on suppose enfin que le matériau obéit au critère de limite élastique de Tresca. Quelle est alors, en fonction de $\lambda$, $\beta$ et de la limite élastique en traction simple $\sigma_0$, la valeur maximale de l'élévation $T_1 - T_0$ de la température de la paroi extérieure de la sphère ?
**Application numérique :** $E = 200000\,\text{MPa}$, $\sigma_0 = 300\,\text{Mpa}$ et $\beta = 10^{-5}\,^{\text{o}}\text{C}^{-1}$.

**Exercice : Poutre soumise à un champ axial d'actions mécaniques à distance** Une poutre de longueur $l$ et de sections droites rectangulaires de mêmes dimensions et d'aire $S$ (figure 2) est consituée d'un matériau homogène de masse volumique $\rho$ au comportement élastique linéaire et isotrope, de module d'Young $E$ et de coefficient de Poisson $\nu = 0$. La poutre, encastrée à son extrémité gauche $x = 0$ et libre à son extrémité droite $x = l$, est soumise à la densité massique d'actions mécaniques à distance $\mathbf{b} = ax^2\,\vec{e_x}$, où $a$ est une constante strictement positive donnée de dimension $\mathrm{L}^{-1}\mathrm{T}^{-2}$. On suppose alors, compte tenu des hypothèses précédentes et de la géométrie du problème, que le champ des déplacements adopte la forme $\mathbf{u} = u(x)\,\vec{e_x}$, où $\vec{e_x}$ est le vecteur directeur de l'axe $Ox$ et où $u$ est une fonction de $x$ que l'on se propose de déterminer.

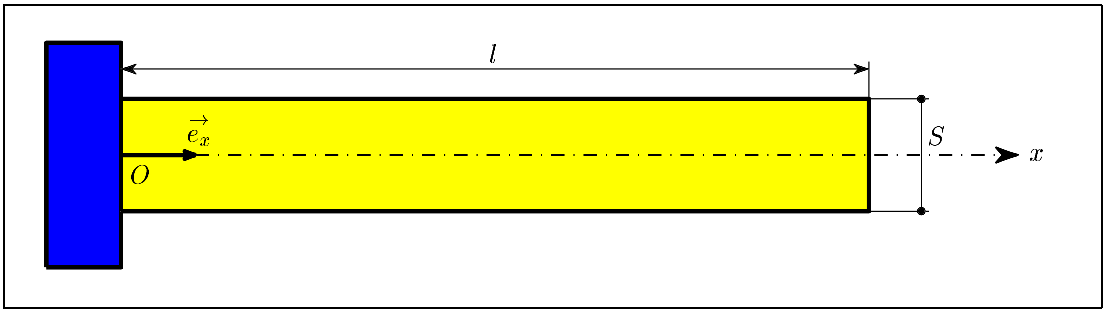


FIG. 2 – Poutre soumise à un champ axial d'actions mécaniques à distance

1. De l'équation indéfinie de léquilibre en projection sur $\vec{e_x}$ ainsi que des conditions aux limites cinématique en $x = 0$ et statique en $x = l$ déduire l'expression du déplacement axial $u(x)$.

On se propose, dans ce qui suit, d'exhiber une solution (a priori approchée) grâce au théorème de l'énergie potentielle.

2. On pose $u(x) = \alpha x$. Donner l'expression de l'énergie potentielle $J(\alpha)$ et dire quelle valeur de $\alpha$ la minimise. Quel est alors le déplacement en $x = l$ ? (on comparera ce dernier avec la valeur exacte trouvée à la question 1). En quoi cette solution n'est pas satisfaisante ?
3. On pose à présent $u(x) = \alpha x + \beta x^4$. Calculer $J(\alpha, \beta)$ et montrer que l'on obtient alors la solution trouvée à la question 1.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$. Dire, sans faire de calculs mais en le justifiant, ce que l'on obtiendrait en posant $u(x) = \sum_{k=1}^{k=n} \alpha_k x^k$.