E.N.T.P.E
Département Mathématiques, Informatique et Physique

Cours de Mécanique des Milieux Continus (1$^{\text{ère}}$ année)
Devoir numéro 1
Durée 2 heures

Vendredi 12 Octobre 2007

Documents autorisés : Polycopié de cours et notes manuscrites personnelles.
Les archives (i.e. les documents antérieurs au début du cours) ne sont pas autorisées.

Problème : Transformation plane isochore

Dans tout le problème on limitera l'étude de la transformation au plan $X_3 = 0$.

On donne, dans l'espace physique $\mathbb{R}^3$ rapporté au repère orthonormé direct $R = (O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, la transformation linéaire suivante

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & = & (1+\alpha t)\cos\beta t\, X_1 - \frac{1}{1+\alpha t}\sin\beta t\, X_2 \\ x_2 & = & (1+\alpha t)\sin\beta t\, X_1 + \frac{1}{1+\alpha t}\cos\beta t\, X_2 \\ x_3 & = & X_3 \end{array} \right. \tag{1}$$

où $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ sont deux constantes données de dimensions T^{-1} et où $t \geq 0$ désigne la variable temps.

L'instant $t = 0$ étant choisi comme instant de référence, (X_1, X_2, X_3) représentent les coordonnées à cet instant d'une particule donnée P et (x_1, x_2, x_3) les coordonnées de cette même particule à l'instant t.

1. Soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ les courbes matérielles constituées, à l'instant de référence $t = 0$, par les particules des demi-droites ayant pour équations respectives $(X_2 = X_3 = 0, X_1 \geq 0)$ et $(X_1 = X_3 = 0, X_2 \geq 0)$. Quelles sont leurs transformées à l'instant t ? Quelle conclusion peut-on d'ores et déjà tirer de ce résultat ?
2. Donner, dans le système de coordonnées polaires (r, θ), l'équation des trajectoires des particules des demi-droites matérielles $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ introduites à la question 1. Quelle est la nature de ces trajectoires ?
3. On considère à présent les courbes matérielles constituées, à l'instant t, par les particules des cercles du plan $x_3 = 0$ centrés sur l'origine de ce plan. Quel était le lieu de ces courbes matérielles à l'instant de référence $t = 0$?

4. Donner l'expression de la transformation linéaire tangente $\mathbf{F}$ puis montrer que la transformation définie par les relations (1) est isochore (i.e. que cette transformation s'effectue à volume constant).
5. Déterminer les tenseurs de Cauchy à droite $\mathbf{C}$ et de Green-Lagrange $\mathbf{L}$. En déduire alors les directions principales de déformation puis vérifier la cohérence de ce résultat avec les réponses à la question 1.
6. En tirant parti de l'expression de $\mathbf{C}$ obtenue à la question 5, donner la décomposition polaire $\mathbf{F} = \mathbf{R}.\mathbf{U}$ de $\mathbf{F}$. Montrer que là encore ce résultat pouvait être obtenu d'emblée à partir des réponses à la question 1.
7. Soit $\theta \in [-\frac{\Pi}{2}, \frac{\Pi}{2}]$, $\vec{N}= \cos\theta\, \vec{e_1} + \sin\theta\, \vec{e_2}$ et soit ε_{NN} la dilatation linéique dans la direction $\vec{N}$. Donner l'expression de ε_{NN} puis représenter sommairement, en distinguant les cas $\theta \in [\frac{-\Pi}{4}, \frac{\Pi}{4}]$, $\theta \in]\frac{-\Pi}{2}, -\frac{\Pi}{4}[\cup]\frac{\Pi}{4}, \frac{\Pi}{2}[$ et $\theta = \pm\frac{\Pi}{2}$, les variations de cette dilatation au cours du temps.
   Indication : On évaluera avantageusement $\lim\limits_{t\to+\infty} \varepsilon_{NN}$ ainsi que $\lim\limits_{t\to 0^+} \frac{\mathrm{d}\varepsilon_{NN}}{\mathrm{d}t}$.
8. Soit à présent $\vec{N}= \frac{1}{\sqrt{2}}\, \vec{e_1} + \frac{1}{\sqrt{2}}\, \vec{e_2}$, $\vec{T}= -\frac{1}{\sqrt{2}}\, \vec{e_1} + \frac{1}{\sqrt{2}}\, \vec{e_2}$ et soit ε_{NT} la demi-distorsion entre les directions $\vec{N}$ et $\vec{T}$. Etudier les variations de cette demi-distorsion au cours du temps.
9. En tirant parti de la linéarité de la transformation définie par (1) et de la décomposition polaire de $\mathbf{F}$ obtenue à la question 6, montrer que le champ des vitesses a pour expression eulérienne $\mathbf{v} = v_1\, \vec{e_1} + v_2\, \vec{e_2}$ avec
$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \frac{\alpha}{1+\alpha t} \begin{bmatrix} \cos 2\beta t & \sin 2\beta t \\ \sin 2\beta t & -\cos 2\beta t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{2}$$
   En déduire alors l'expression des tenseurs des taux de déformation $\mathbf{D}$, des taux de rotation $\mathbf{W}$ ainsi que celle du tourbillon des vitesses $\overset{\smile}{\vec{w}}= \frac{1}{2}\mathbf{rot}_x\mathbf{v}$.
10. Vérifier rapidement, d'un point de vue eulérien cette fois, la nature isochore du mouvement puis donner l'expression de la fonction courant ψ.
    Indication : On rappelle que la fonction de courant ψ vérifie $\frac{\partial\psi}{\partial x_1} = -v_2$ et $\frac{\partial\psi}{\partial x_2} = v_1$.
11. On considère ici le cas particulier où $\alpha = 0$ et $\beta > 0$. Déterminer les lignes de courant à l'instant t. Que peut on dire des trajectoires ? Comment qualifier le mouvement du corps matériel ?
12. On s'intéresse à présent au cas particulier où $\beta = 0$ et $\alpha > 0$. Déterminer les lignes de courant à l'instant t. Vérifier rapidement le caractère irrotationnel du mouvement puis donner l'expression du potentiel des vitesses φ. Quel lien particulier existe-t-il ici entre le réseau des lignes de courant et celui des équipotentielles ?
    Indication : On rappelle que le potentiel des vitesses φ satisfait $\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} = v_1$ et $\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} = v_2$.
13. On suppose enfin $\alpha = \beta > 0$. Déterminer les lignes de courant à l'instant $t = 0$.