E.N.T.P.E
Département Mathématiques, Informatique et Physique

Cours de Mécanique des Milieux Continus (1$^{\text{ère}}$ année)
Devoir numéro 2
Durée 2 heures

Vendredi 16 Novembre 2007

Documents autorisés : Polycopié de cours et notes manuscrites personnelles.
Les archives (i.e. les documents antérieurs au début du cours) ne sont pas autorisées.

Problème 1 : Cylindre creux en rotation uniforme Un cylindre creux de rayon intérieur R_0 et de rayon extérieur R_1 est animé d'un mouvement de rotation uniforme de vitesse angulaire ω autour de son axe de révolution Oz. Ce cylindre est constitué d'un matériau de masse volumique ρ ayant un comportement élastique linéaire isotrope, de module d'Young E et de coefficient de Poisson $\nu = 0$. Les actions gravifiques étant négligées on suppose alors, compte tenu des symétries du problème et de l'absence d'effet Poisson, que dans le référentiel lié au solide en rotation uniforme le champ des déplacements exprimé relativement au système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) adopte la forme $\mathbf{u} = u(r)\vec{e_r}$ où u est une fonction inconnue de la variable d'espace r que l'on se propose de déterminer.

1. Donner, en fonction de u et r, l'expression du tenseur linéarisé des petites déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$ puis en déduire, en fonction cette fois de u, r et E, celle du tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$.
2. Le champ des actions mécaniques à distance se réduisant ici aux forces d'inertie, exprimer ces dernières en fonction de ω et r.
3. Des questions 1 et 2 déduire, en tirant parti de la seule équation indéfinie de l'équilibre non trivialement satisfaite, que u est solution de l'équation différentielle ordinaire

$$u''(r) + \frac{u'(r)}{r} - \frac{u(r)}{r^2} = -\frac{\rho\omega^2}{E} r \quad r \in]R_0, R_1[\tag{1}$$

4. Montrer que l'équation différentielle ordinaire (1) admet une solution particulière $u^{(1)}(r)$ de la forme $u^{(1)}(r) = ar^3$ et donner, en fonction de ρ, ω et E, l'expression de la constante a. Chercher ensuite des solutions $u^{(0)}(r)$ de l'équation homogène associée sous la forme $u^{(0)}(r) = r^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}^\star$. En déduire alors, en fonction de ρ, ω, E, r et de deux constantes d'intégration A et B, l'expression générale de $u(r)$.
5. Ecrire les conditions aux limites en contrainte en $r = R_0$ et $r = R_1$ puis donner, en fonction de ρ, ω, E, R_0 et R_1, l'expression des deux constantes d'intégration A et B. En déduire enfin celle des composantes non nulles de $\mathbf{u}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ et $\boldsymbol{\sigma}$.

Problème 2 : Sollicitation thermomécanique d'une sphère creuse Une sphère creuse de rayon intérieur R_0 et de rayon extérieur R_1 est constituée d'un matériau au comportement élastique linéaire isotrope, de module d'Young E et de coefficient de Poisson $\nu = \frac{1}{4}$. Les déplacements en $R = R_1$ étant empêchés, on soumet cette sphère à une augmentation de température ΔT. On suppose alors, compte tenu des symétries du problème, que le champ des déplacements exprimé relativement au système de coordonnées sphériques (r, θ, φ) adopte la forme $\mathbf{u} = u(r)\,\vec{e_r}$ où u est une fonction inconnue de la variable d'espace r que l'on se propose de déterminer.

1. Montrer que les modules de Lamé λ et μ sont égaux et donner leur expression en fonction de E.
2. Donner, en fonction de u et r, l'expression du tenseur linéarisé des petites déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$ puis en déduire, en fonction cette fois de u, r, μ, ΔT et du coefficient de dilatation thermique linéaire β, celle du tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$.
3. Les actions mécaniques à distance (poids propre) étant ici négligées, de la question 2 déduire, en tirant parti de la seule équation indéfinie de l'équilibre non trivialement satisfaite, que u est solution de l'équation différentielle ordinaire

$$u''(r) + 2\frac{u'(r)}{r} - 2\frac{u(r)}{r^2} = 0 \quad r \in]R_0, R_1[\tag{2}$$

4. Chercher des solutions $u^{(0)}(r)$ de l'équation différentielle ordinaire (2) sous la forme $u^{(0)}(r) = r^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}^\star$, puis donner, en fonction de r et de deux constantes d'intégration A et B, l'expression générale de $u(r)$.
5. Ecrire les conditions aux limites en contrainte en $r = R_0$ ainsi qu'en déplacement en $r = R_1$ puis donner, en fonction de R_0, R_1, β et ΔT, l'expression des deux constantes d'intégration A et B. En déduire enfin celle des composantes non nulles de $\mathbf{u}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ et $\boldsymbol{\sigma}$.
6. Le matériau obéissant au critère de limite élastique de Tresca, déduire, en fonction de μ, β, ΔT, R_0, R_1 et de la limite élastique en traction simple σ_0, la condition de non plastification de la sphère.
7. La sphère est destinée à subir une élévation de température maximale de 100 ℃. On a par ailleurs $R_1 = 10\,\text{cm}$, $E = 200000\,\text{MPa}$, $\beta = 1.2\,10^{-5}\,℃^{-1}$ et $\sigma_0 = 440\,\text{MPa}$. Enfin l'on souhaite que la masse de cette sphère soit la plus grande possible et qu'il n'y ait aucune déformation plastique. Quelle valeur doit on alors donner à R_0 ?

Exercice : Ecoulement sphérique d'un fluide visqueux newtonien L'écoulement d'un fluide visqueux newtonien de viscosité dynamique de cisaillement η et de masse volumique ρ indépendantes des variables d'espace x_1, x_2 et x_3 est défini par le champ eulérien des vitesses $\mathbf{v}(\vec{x}) = \frac{q}{4\Pi}\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3}$, $\forall\, \vec{x} \in \mathcal{D} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3, \|\vec{x}\| \geq 1\}$, où q est un réel donné.

1. Donner l'expression du tenseur $\mathbf{D}$ des taux de déformation puis en déduire celle du tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$.

   Indication On pourra, afin de simplifier l'écriture, poser $r = \|\vec{x}\|$. On rappelle par ailleurs que $\partial_i r = \frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r}$, $\forall i \in \{1, 2, 3\}$.
2. Les actions mécaniques à distance étant ici négligées, des équations indéfinies du mouvement et de l'expression de $\boldsymbol{\sigma}$ trouvée à la question 1 déduire celle de la pression p en supposant cette dernière nulle aux points de la sphère unité ayant pour centre l'origine de l'espace physique $\mathbb{R}^3$ (on exprimera p en fonction de ρ, q et $r = \|\vec{x}\|$).
   Indication On a $\mathbf{div}_x\mathbf{D} = \mathbf{grad}_x(\mathrm{div}_x\mathbf{v}) - \frac{1}{2}\mathbf{rot}_x(\mathbf{rot}_x\mathbf{v})$.