

**E.N.T.P.E**  
**Département Mathématiques, Informatique et Physique**

Cours de Mécanique des Milieux Continus (1<sup>ère</sup> année)  
Devoir numéro 3  
Durée 2 heures

Jeudi 13 Décembre 2007

**Documents autorisés :** livre de cours et notes manuscrites personnelles.

*Les archives (i.e. les documents antérieurs au début du cours) ne sont pas autorisées.*

### Problème : Essai de compression fretté

Une éprouvette cylindrique de rayon  $R$  et de demi-hauteur  $H$  est soumise à un essai de compression fretté (i.e. les déplacements radiaux en  $z = \pm H$  sont totalement empêchés) ainsi que l'illustre la figure 1 où le contour en trait discontinu est celui de l'échantillon dans sa configuration initiale tandis que le domaine grisé représente sa configuration déformée à l'état d'équilibre final.

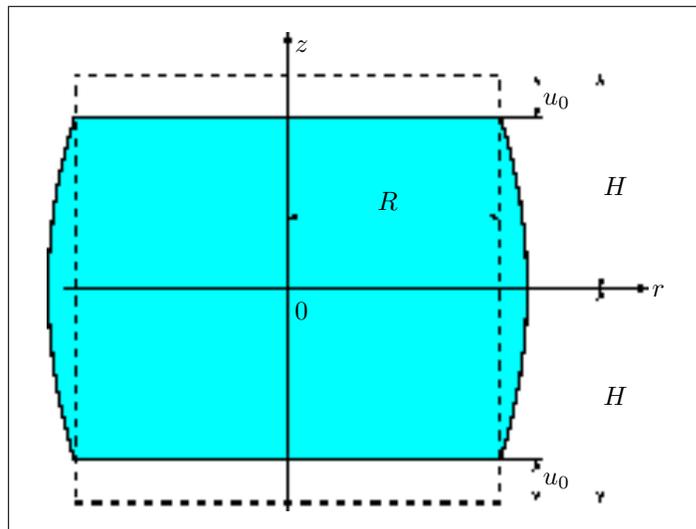


FIG. 1 – Essai de compression fretté

Cette éprouvette est constituée d'un matériau non pesant ayant un comportement élastique linéaire isotrope, de modules de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$ . On suppose alors, compte tenu de la géométrie du problème, que le champ des déplacements exprimé dans le repère local  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$  associé au système de coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  adopte la forme  $\mathbf{u} = u_r(r, z)\vec{e}_r + u_z(z)\vec{e}_z$ , où  $u_r$  (resp<sup>t</sup>  $= u_z$ ) est une fonction inconnue des variables d'espace  $r$  et  $z$  (resp<sup>t</sup> de la seule variable d'espace  $z$ ).

1. Montrer, en tirant parti des équations de Lamé-Navier (utiliser la variante (5.106) page 233 du livre), que  $u_r$  et  $u_z$  sont solutions d'un système de deux équations aux dérivées partielles que l'on explicitera.

Dans toute la suite du problème on choisit d'approcher  $u_z$  par la fonction linéaire  $z \mapsto -\frac{u_0}{H}z$ .

2. Montrer que cette approximation de  $u_z$  satisfait les conditions aux limites cinématiques en  $z = \pm H$  ainsi que les exigences de symétrie du problème en  $z = 0$  puis en donner une interprétation physique. Selon vous, l'hypothèse ainsi faite est-elle vraisemblable?
3. De l'équation de Lamé-Navier en projection sur  $\vec{e}_z$  ainsi que des exigences de symétrie du problème en  $r = 0$  déduire que l'approximation précédente de  $u_z$  implique  $\partial_z u_r = 0$ . Montrer ensuite, en tirant cette

fois parti des conditions aux limites cinématiques en  $z = \pm H$ , que l'on a nécessairement  $u_r = 0$ . Vérifier enfin que cette expression de  $u_r$  satisfait l'équation de Lamé-Navier en projection sur  $\vec{e}_r$ .

4. Montrer, en tirant à présent parti des conditions aux limites en contrainte en  $r = R$  (paroi latérale libre de l'éprouvette), que la solution obtenue à l'issue de la question 3 n'est acceptable que pour une valeur particulière du coefficient de Poisson  $\nu$  que l'on déterminera. Justifier alors, par un raisonnement physique, le caractère éminemment prévisible de ce résultat.

L'approximation précédente de  $u_z$  par la fonction linéaire  $z \mapsto -\frac{u_0}{H}z$  étant conservée, on choisit, dans tout ce qui suit et compte tenu de l'allure de la déformée de l'échantillon en  $r = R$  (voir la figure 1), d'approcher  $u_r$  par la fonction  $(r, z) \mapsto ar \cos \frac{\pi z}{2H}$  où  $a$  est une constante que l'on se propose de déterminer. Bien que les questions 3 et 4 nous aient appris que ces deux approximations ne satisfont les équations de Lamé-Navier et l'ensemble des conditions aux limites que pour la valeur triviale  $a = 0$  et pour une valeur particulière de  $\nu$ , on se propose de trouver une valeur optimale de  $a$  grâce au théorème de l'énergie potentielle.

5. Montrer que l'approximation précédente de  $u_r$  satisfait les conditions aux limites cinématiques en  $z = \pm H$  ainsi que les exigences de symétrie du problème en  $r = 0$ .
6. Des approximations précédentes de  $u_r$  et  $u_z$  déduire, en fonction de  $u_0$ ,  $H$ ,  $a$ ,  $r$  et  $z$ , l'expression des composantes non nulles du tenseur linéarisé des petites déformations  $\varepsilon$ . En déduire ensuite, en fonction de ces mêmes grandeurs ainsi que des modules de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$ , celle de l'énergie locale de déformation élastique  $w = \frac{1}{2}[\lambda\theta^2 + 2\mu\varepsilon:\varepsilon]$  où  $\theta = \text{tr}\varepsilon$ .
7. Montrer, en tirant parti du théorème de l'énergie potentielle et plus précisément de la remarque 1 du livre page 239, que la valeur optimale de  $a$  minimise la fonction  $g(a) = \int_{-H}^{+H} \int_0^R w(r, z) 2\pi r dr dz$ .
8. Evaluer  $g(a)$  puis déterminer, dans le cas où  $R = H$ , la valeur optimale  $a_{\text{opt}}$  de  $a$ . On donnera l'expression finale de  $a_{\text{opt}}$  en fonction de  $u_0$ ,  $H$  et  $\nu$ .
9. Les variations de  $a_{\text{opt}}$  avec  $\nu$  sont-elles conformes à ce que laisse prédire l'intuition? Enfin, l'expression trouvée est-elle compatible avec les résultats de la question 4?

## Exercice 1 : Ecoulement d'un fluide newtonien dans une conduite de section variable

On s'intéresse ici à l'écoulement permanent d'un fluide visqueux newtonien incompressible de viscosité dynamique de cisaillement  $\eta$  et de masse volumique  $\rho$  dans la conduite cylindrique d'axe de révolution  $Oz$  et de section variable représentée sur la figure 2.

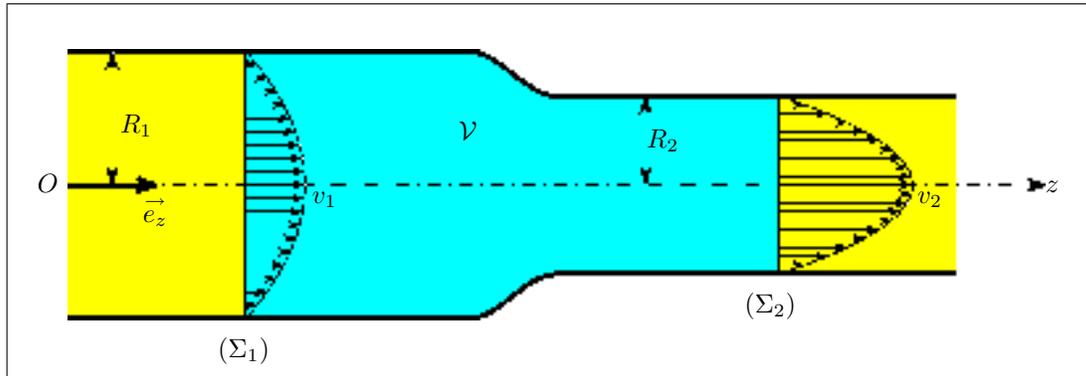


FIG. 2 – Ecoulement d'un fluide newtonien dans une conduite de section variable

En l'absence d'actions mécaniques à distance on admet, compte tenu des hypothèses et de la géométrie du problème, qu'au voisinage de chacune des sections droites  $(\Sigma_1)$  et  $(\Sigma_2)$  de la conduite (voir la figure 2) le champ des vitesses exprimé dans le repère local  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$  associé au système de coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  adopte la forme  $\mathbf{v} = v(r, z)\vec{e}_z$  où  $v$  est une fonction inconnue dépendant a priori des variables  $r$  et  $z$ . On montre

alors, par une démarche analogue à celle de l'exercice E5.8 du livre (tube de Poiseuille), qu'au voisinage de chacune de ces sections la pression  $p$  est uniforme et la fonction  $v$  indépendante de  $z$ . De façon plus précise on a, en reprenant les résultats de ce même exercice et pour  $i \in \{1, 2\}$ ,  $v(r) = \frac{G_i}{4\eta}(R_i^2 - r^2)$  et  $p = p_i$  en tout point de la section  $(\Sigma_i)$  de rayon  $R_i$ , où  $G_i$  est une constante strictement positive. Le débit volumique  $Q$  du fluide traversant chacune des deux sections a alors pour expression  $Q = \frac{\Pi G_1 R_1^4}{8\eta} = \frac{\Pi G_2 R_2^4}{8\eta}$ . Enfin, pour  $i \in \{1, 2\}$  on désigne par  $S_i$  l'aire de la section  $(\Sigma_i)$  et par  $v_i$  la valeur de  $v$  au point de cette section situé sur l'axe de révolution  $Oz$ .

1. Soit  $\mathcal{V}$  le volume fluide compris entre les sections droites  $(\Sigma_1)$  et  $(\Sigma_2)$  de la conduite (voir la figure 2) et soit  $F \vec{e}_z$  la force qu'exerce ce fluide sur les parois de la conduite. De l'application du théorème d'Euler à  $\mathcal{V}$  déduire, en fonction de  $\rho$ ,  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $v_1$  et  $v_2$ , l'expression de  $F$ .
2. Soit  $\mathcal{V}$  le volume fluide défini à la question 1 et soit  $\mathcal{P}^i$  la puissance des efforts intérieurs dissipée dans  $\mathcal{V}$ . Du théorème de l'énergie cinétique appliqué à  $\mathcal{V}$  déduire, en fonction de  $Q$ ,  $\rho$ ,  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $v_1$  et  $v_2$ , l'expression de  $\mathcal{P}^i$ .

**Indication :** Si  $h$  est un champ scalaire et  $\mathcal{V}$  un volume matériel de frontière  $\mathcal{S}$  on a

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} h \, dv = \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial h}{\partial t} \, dv + \int_{\mathcal{S}} h \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, ds$$

## Exercice 2 : Traction uniaxiale d'un ruban déformable

Un ruban constitué d'un matériau capable de subir de grandes déformations est soumis à un essai de traction uniaxiale ainsi que l'illustre la figure 3 où le contour en trait discontinu est celui du ruban dans sa configuration initiale tandis que le domaine grisé représente sa configuration déformée à l'instant  $t$ .

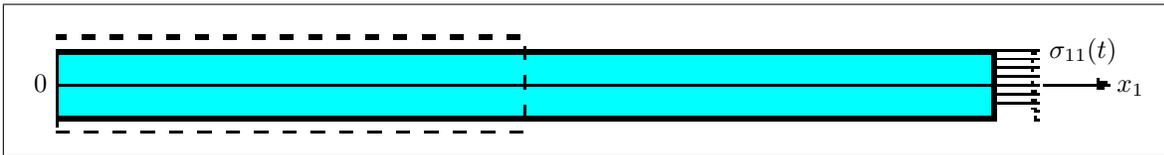


FIG. 3 – Traction uniaxiale d'un ruban déformable

La transformation de ce ruban est supposée adopter la forme

$$\begin{cases} x_1 &= (1 + \alpha t)X_1 \\ x_2 &= (1 + g(t))X_2 \\ x_3 &= (1 + g(t))X_3 \end{cases} \quad t \geq 0 \quad (1)$$

où  $\alpha > 0$  est une constante donnée de dimension  $T^{-1}$  et  $g$  une fonction de la variable temps  $t$  que l'on se propose de déterminer. Enfin, Le comportement du matériau est régi par la relation  $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \lambda \text{tr} \mathbf{D} \boldsymbol{\delta} + 2\mu \mathbf{D}$  où  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{W}$  sont respectivement les tenseurs des taux de déformation et de rotation, où  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$  désigne la dérivée objective d'Oldroyd du tenseur des contraintes de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$ , définie par  $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - (\mathbf{D} + \mathbf{W}) \cdot \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{D} - \mathbf{W})$ , et où  $\lambda$  et  $\mu$  sont deux constantes mécaniques définies par  $\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$  et  $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ , avec  $E > 0$  et  $\nu \in [0, \frac{1}{2}[$  donnés.

1. Donner, après avoir calculé  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{W}$ , le système de trois équations différentielles ordinaires satisfaites par  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  et  $\sigma_{33}$ . On exprimera ces équations en fonction de  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\alpha$ ,  $t$  et de la fonction inconnue  $g$ .
2. Des conditions aux limites en contrainte sur les parois latérales du ruban déduire, en fonction de  $\alpha$ ,  $t$  et  $\nu$ , l'expression de  $g$ .
3. Donner, en fonction de  $\alpha$ ,  $t$  et  $E$ , l'expression finale de  $\sigma_{11}$ .
4. Le matériau possédant une limite élastique donnée par le critère de Tresca et  $\tau_0$  désignant la valeur de la contrainte de cisaillement  $\tau_n$  à la limite élastique, donner, en fonction de  $\alpha$ ,  $\tau_0$  et  $E$ , la valeur de l'instant jusqu'auquel la solution précédente reste valable.