E.N.T.P.E
Département Mathématiques, Informatique et Physique

Cours de Mécanique des Milieux Continus ($1^{\text{ère}}$ année)
Devoir de rattrapage
Durée 2 heures

Mardi 5 Février 2008

Documents autorisés : Polycopié de cours et notes manuscrites personnelles.
Les archives (i.e. les documents antérieurs au début du cours) ne sont pas autorisées.

Problème 1 (13 points) : On donne, dans l'espace physique $\mathbb{R}^3$ rapporté au repère orthonormé direct $R = (O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, la transformation linéaire suivante :

$$\begin{cases} x_1 &= X_1 + \alpha t\, X_2 \\ x_2 &= X_2 - (\alpha t)^2 X_1 \\ x_3 &= X_3 \end{cases}$$

où $t \geq 0$ est la variable temps, $\alpha > 0$ une constante donnée de dimension T^{-1} et où X_1, X_2 et X_3 désignent les coordonnées de la particule P à l'instant de référence $t = 0$. Enfin l'on pourra, dans tout le problème et afin d'alléger l'écriture, poser $\tau = \alpha t$.

1. Déterminer la nature des trajectoires des particules (on distinguera plusieurs cas selon la position initiale de ces particules).
2. On s'intéresse aux courbes matérielles constituées, à l'instant $t = 0$, par les droites du plan $X_3 = C$ passant par l'origine de ce plan. Que deviennent-elles à l'instant t ?
3. On s'intéresse à présent aux courbes matérielles constituées, à l'instant $t = 0$, par les cercles du plan $X_3 = C$ centrés sur l'origine de ce plan. Montrer qu'il existe un unique instant $t \neq 0$, que l'on déterminera, auquel ces cercles sont encore des cercles centrés sur l'origine du plan $X_3 = C$.
4. Que valent, à l'instant t, les dilatations dans les directions $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$ ainsi que la demi-distorsion entre ces deux directions ?
5. Donner, à l'instant $t = \frac{1}{\alpha}$, la décomposition polaire de la transformation linéaire tangente $\mathbf{F}$.
6. Donner l'expression de la vitesse $\mathbf{v}$ en variables de Lagrange puis en variables d'Euler.
7. Déterminer les lignes de courant aux instants $t = 0$ et $t = +\infty$.
8. Donner l'équation paramétrique de la ligne d'émission du point de coordonnées $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ et $x_3 = 0$ à l'instant $t = \frac{1}{\alpha}$.

Problème 2 (7 points) : On considère un barreau cylindrique infiniment long, de révolution autour de l'axe Oz et de rayon R. On utilisera, dans tout le problème, le système de coordonnées cylindriques (r, θ, z). Ce barreau, constitué d'un matériau élastique linéaire isotrope et homogène, est soumis, en tout point $\vec{x}$ de coordonnées (r, θ, z), à la densité volumique de forces

$$\mathbf{b}(x) = -\frac{\alpha E}{3(1-2\nu)}\mathbf{grad}_x T(r)$$

où E et ν sont respectivement le module d'Young et le coefficient de Poisson, $\alpha > 0$ une constante donnée, et T une fonction réelle donnée de r, continuement dérivable. Aucun effort ne s'exerce sur la surface latérale $r = R$ du barreau et ses transformations restent infinitésimales.

1. Vérifier rapidement que l'équilibre du barreau est possible, puis montrer que si $\mathbf{u}$ désigne le champ des déplacements, l'équation vectorielle de l'équilibre peut s'écrire

$$\mathbf{grad}_x(\mathrm{div}_x \mathbf{u}) - \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\mathbf{rot}_x(\mathbf{rot}_x \mathbf{u}) = \alpha\frac{1+\nu}{3(1-\nu)}\mathbf{grad}_x T(r)$$

2. On suppose que le champ des déplacements est radial, c'est à dire que $\mathbf{u}$ est de la forme $\mathbf{u} = u(r)\ \vec{e_r}$, où u est une fonction deux fois continuement dérivable de r. Donner l'équation différentielle vérifiée par u.

3. On suppose que le déplacement des points du barreau situés sur l'axe de révolution Oz reste fini et que $T(R) = 0$. Montrer alors, en tirant également parti des conditions aux limites en contrainte sur la suface latérale $r = R$, que l'on a

$$\mathbf{u}(r) = \alpha\frac{1+\nu}{3(1-\nu)}\left[\frac{1}{r}\int_0^r T(\rho)\rho\,\mathrm{d}\rho + (1-2\nu)\frac{r}{R^2}\int_0^R T(\rho)\rho\,\mathrm{d}\rho\right]$$

4. En déduire alors l'expression des champs de déformation et de contrainte.