E.N.T.P.E
Département Mathématiques, Informatique et Physique

Cours de Mécanique des Milieux Continus (1$^{\text{ère}}$ année)
Devoir numéro 1
Durée 2 heures

Vendredi 10 Octobre 2008

Documents autorisés : Polycopié de cours et notes manuscrites personnelles.
Les archives (i.e. les documents antérieurs au début du cours) ne sont pas autorisées.

Problème : Transformation plane irrotationnelle et isochore

Dans tout le problème on limitera l'étude de la transformation au plan $X_3 = 0$.

On donne, dans l'espace physique $\mathbb{R}^3$ rapporté au repère orthonormé direct $R = (O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, la transformation linéaire suivante :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & = & X_1 \cosh \alpha t + X_2 \sinh \alpha t \\ x_2 & = & X_1 \sinh \alpha t + X_2 \cosh \alpha t \\ x_3 & = & X_3 \end{array} \right. \tag{1}$$

où $\alpha > 0$ est une constante donnée de dimension T^{-1} et où $t \geq 0$ désigne la variable temps.

L'instant $t = 0$ étant choisi comme instant de référence, (X_1, X_2, X_3) représentent les coordonnées à cet instant d'une particule donnée P et (x_1, x_2, x_3) les coordonnées de cette même particule à l'instant t.

1. Montrer que les courbes matérielles ayant pour équations $X_1^2 - X_2^2 = \text{cste}$ à l'instant initial $t = 0$ sont globalement invariantes. Que peut-on d'ores et déjà en conclure ?
2. Donner l'expression de la transformation linéaire tangente $\mathbf{F}$ relative à l'instant t puis en déduire celles des tenseurs de Cauchy à droite $\mathbf{C}$ et de Green-Lagrange $\mathbf{L}$.
3. Montrer que cette transformation s'effectue à volume constant.
4. Montrer que les dilatations linéiques ε_{NN} dans les directions $\vec{N}=\vec{e_1}$ et $\vec{N}=\vec{e_2}$ sont identiques et donner leur expression en fonction de $\tau = \alpha t$. Montrer ensuite que la demi-distorsion entre ces deux directions a pour expression $\frac{1}{2}\arcsin(\tanh 2\tau)$ et représenter sur une figure les variations de cette dernière en fonction de τ.

5. De l'étude des propriétés de $\mathbf{F}$ déduire, en tirant parti du théorème 7 du cours (page 55 du livre), que les tenseurs de déformation pure avant rotation $\mathbf{U}$ et après rotation $\mathbf{V}$ coïncident ici avec $\mathbf{F}$. En déduire les directions principales de déformation $\vec{I_1}$ et $\vec{I_2}$. Déterminer ensuite les valeurs principales de $\mathbf{U}$, $\mathbf{C}$ et $\mathbf{L}$. Donner enfin l'expression des dilatations principales et représenter sur une figure leurs variations en fonction de $\tau = \alpha t$.
6. On s'intéresse à présent au tenseur de déformation de Hencky $\mathbf{H}$ défini par $\mathbf{H} = \ln \mathbf{V}$. Dans le repère principal de déformation $(O, \vec{I_1}, \vec{I_2})$, ce tenseur est diagonal et ses composantes ne sont autres que les logarithmes de celles de $\mathbf{V}$ (rappelons qu'ici $\mathbf{U} = \mathbf{V} = \mathbf{F}$). Quelle est alors l'expression de $\mathbf{H}$ relativement au repère $R = (O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$?
7. Déterminer l'expression lagrangienne du champ des vitesses $\mathbf{v}$ puis en déduire que son expression eulérienne est :
$$\mathbf{v} = \alpha x_2 \vec{e_1} + \alpha x_1 \vec{e_2} \tag{2}$$
8. Retrouver le fait que cette transformation s'effectue à volume constant, puis donner l'expression de la fonction de courant $\psi(x_1, x_2)$ telle que $v_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}$ et $v_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1}$.
9. Donner l'expression des lignes de courant. En déduire alors la nature des trajectoires des particules puis représenter ces dernières sur une figure en indiquant clairement le sens de parcours des particules.
10. Montrer que le tourbillon des vitesses $\widetilde{\vec{w}} = \frac{1}{2}\mathbf{rot}_x \mathbf{v}$ est nul puis donner l'expression du potentiel des vitesses $\varphi(x_1, x_2)$ tel que $\mathbf{v} = \mathbf{grad}_x \varphi$. Représenter le réseau des équipotentielles sur la figure précédente et montrer que ce dernier est orthogonal au réseau des lignes de courant.
11. Déterminer l'expression eulérienne du champ des accélérations $\boldsymbol{\gamma}$. Quelles sont alors les courbes enveloppes de ce champ ? Donner ensuite l'expression du potentiel des accélérations $\phi(x_1, x_2)$ tel que $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{grad}_x \phi$.
12. Donner l'expression du tenseur gradient des vitesses $\mathbf{G}$ puis celles des tenseurs des taux de déformation $\mathbf{D}$ et de rotation $\mathbf{W}$. Quelle relation existe-t-il ici entre le tenseur des taux de déformation $\mathbf{D}$ et le tenseur de déformation de Hencky $\mathbf{H}$ déterminé à la question 6 ?
13. De la résolution du système différentiel $\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{v}$, $t > 0$, $\vec{x}(0) = \vec{X}$ et de l'expression (2) de $\mathbf{v}$ retrouver l'expression (1) de la transformation $\mathcal{F}_t$ relative à l'instant t.
Indication On rappelle que le système différentiel $\dot{Y}(t) = \dot{A}(t).Y(t)$, $t > 0$, $Y(0) = Y_0$ a pour solution $Y(t) = [\exp A(t)].[\exp A(0)]^{-1}.Y_0$.