E.N.T.P.E.
Département Mathématiques, Informatique et Physique

Cours de Mécanique des Milieux Continus (1ère année)
Devoir numéro 2
Durée 2 heures

Vendredi 14 Novembre 2008

Documents autorisés : Polycopié de cours et notes manuscrites personnelles.
Les archives (i.e. les documents antérieurs au début du cours) ne sont pas autorisées.

Problème : Cylindres coaxiaux

On considère les cylindres $C^{(1)}$ et $C^{(2)}$ représentés sur la figure 1. Ces deux cylindres, de même axe de révolution Oz et de même hauteur H, sont constitués chacun d'un matériau homogène et non pesant, au comportement élastique linéaire et isotrope. Les deux matériaux ont même module d'Young E. Ils obéissent tous deux au critère de limite élastique de Tresca et possèdent la même limite élastique en traction simple σ_0.

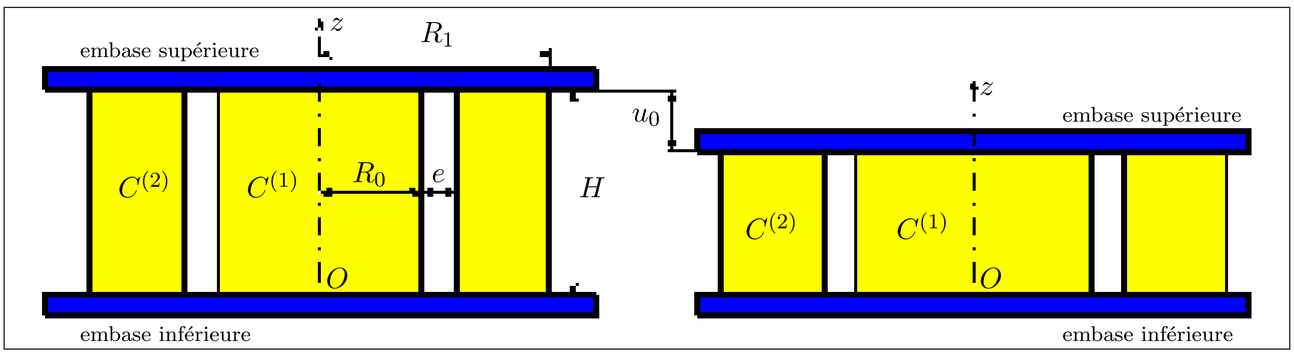

FIG. 1 – Cylindres coaxiaux

Le cylindre plein $C^{(1)}$ est incompressible et a pour rayon R_0, tandis que le cylindre creux $C^{(2)}$ a pour rayon intérieur $R_0 + e$, pour rayon extérieur R_1 et pour coefficient de Poisson $\nu = \frac{1}{3}$. L'embase inférieure est rigide et fixe tandis que l'embase supérieure, également rigide, subit un déplacement vertical descendant $-u_0 \overrightarrow{e_z}$, avec $0 \leq \frac{u_0}{H} \ll 1$. L'interface entre chacune des embases et chacun des cylindres $C^{(1)}$ et $C^{(2)}$ est supposée parfaitement lisse, de sorte que leurs déplacements radiaux ne sont pas empêchés.

On suppose alors, compte tenu de l'ensemble des hypothèses précédentes, que le champ des déplacements $\mathbf{u}^{(i)}$ du cylindre $C^{(i)}$, $i \in \{1, 2\}$, exprimé dans le repère local $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$ associé au système de coordonnées cylindriques (r, θ, z), adopte la forme $\mathbf{u}^{(i)}(r, z) = u_r^{(i)}(r)\,\overrightarrow{e_r} + u_z^{(i)}(z)\,\overrightarrow{e_z}$, où $u_r^{(i)}$ et $u_z^{(i)}$, $i \in \{1, 2\}$, sont des fonctions inconnues dépendant respectivement des variables r et z. On désigne par $\boldsymbol{\varepsilon}^{(i)}$ et $\boldsymbol{\sigma}^{(i)}$, respectivement, les champs tensoriels des petites déformations et des contraintes de Cauchy relatifs au cylindre $C^{(i)}$, $i \in \{1, 2\}$. Enfin l'on supposera dans un premier temps (questions 1 à 7) que le déplacement vertical de l'embase supérieure est tel que les cylindres $C^{(1)}$ et $C^{(2)}$ n'entrent pas en contact et que leur comportement reste dans le domaine élastique.

1. De l'incompressibilité du cylindre $C^{(1)}$ déduire les équations différentielles ordinaires dont $u_r^{(1)}$ et $u_z^{(1)}$ sont solutions puis donner, en fonction de u_0, H, r et z et après avoir tiré parti des conditions aux limites cinématiques en $z = 0$, $z = H$ et $r = 0$, l'expression de ces deux champs.

2. Des expressions de $u_r^{(1)}$ et $u_z^{(1)}$ obtenues à la question 1 déduire, en fonction de u_0 et H, celles des composantes de $\boldsymbol{\varepsilon}^{(1)}$ puis, en fonction cette fois de u_0, H et E et après avoir tiré parti des conditions aux limites statiques en $r = R_0$, celles des composantes de $\boldsymbol{\sigma}^{(1)}$.
3. Montrer que les modules de Lamé λ et μ du matériau constituant le cylindre $C^{(2)}$ satisfont les relations $\lambda = 2\mu = \frac{3E}{4}$.
4. Donner, en fonction de r, $u_r^{(2)}$ et $u_z^{(2)}$, l'expression des composantes de $\boldsymbol{\varepsilon}^{(2)}$ puis, en fonction cette fois de E, r, $u_r^{(2)}$ et $u_z^{(2)}$, celle des composantes de $\boldsymbol{\sigma}^{(2)}$.
5. De l'équation indéfinie de l'équilibre en projection sur $\overrightarrow{e_z}$ déduire l'équation différentielle ordinaire dont $u_z^{(2)}$ est solution puis donner, en fonction de u_0, H et z et après avoir tiré parti des conditions aux limites cinématiques en $z = 0$ et $z = H$, l'expression de ce champ.
6. De l'équation indéfinie de l'équilibre en projection sur $\overrightarrow{e_r}$ déduire l'équation différentielle ordinaire dont $u_r^{(2)}$ est solution puis montrer que cette dernière a pour solution générale $u_r^{(2)}(r) = Ar + \frac{B}{r}$, où A et B sont deux constantes arbitraires.
7. Donner, en fonction de u_0, H, E, A, B et r, l'expression des composantes de $\boldsymbol{\sigma}^{(2)}$. En déduire alors , en fontion de u_0 et H et après avoir tiré parti des conditions aux limites statiques en $r = R_0 + e$ et $r = R_1$, l'expression des constantes A et B. Donner enfin, en fonction de u_0, H, E et r, les expressions de $u_r^{(2)}$ et des composantes de $\boldsymbol{\varepsilon}^{(2)}$ et $\boldsymbol{\sigma}^{(2)}$.
8. Soit u_c la valeur de u_0 pour laquelle les cylindres $C^{(1)}$ et $C^{(2)}$ entrent en contact. En supposant que ce contact peut s'effectuer sans qu'apparaissent de déformations plastiques donner, en fonction de R_0 et e, l'expression du ratio $\frac{u_c}{H}$. Quelle est alors, en fonction de $\frac{\sigma_0}{E}$, la limite du ratio $\frac{e}{R_0}$ à ne pas excéder si l'on veut que l'hypothèse précédente soit satisfaite ?
   Application numérique $E = 200000$ MPa, $\sigma_0 = 360$ MPa.

On suppose désormais que $e = 0$, de sorte que les cylindres $C^{(1)}$ et $C^{(2)}$ sont initialement (i.e. avant que l'embase supérieure ne se déplace) en contact. L'interface $r = R_0$ entre ces deux cylindres est par ailleurs supposée parfaitement lisse.

9. Justifier le fait que les cylindres $C^{(1)}$ et $C^{(2)}$ restent en contact lorsque l'embase supérieure se déplace.
10. Justifier le fait que les expressions de $u_r^{(1)}$ et $u_z^{(1)}$ obtenues à la question 1 ainsi que celle de $u_z^{(2)}$ obtenue à la question 5 sont inchangées, et que l'on a toujours $u_r^{(2)}(r) = Ar + \frac{B}{r}$, de sorte que les expressions des composantes de $\boldsymbol{\sigma}^{(2)}$, obtenues au début de la question 7 en fonction de u_0, H, E, A, B et r, sont toujours valables.
11. Des conditions aux limites statique en $r = R_1$ et cinématique (contact entre les cylindres $C^{(1)}$ et $C^{(2)}$) en $r = R_0$ déduire, en fonction de u_0, H, R_0 et R_1, l'expression des constantes A et B.
12. Donner, en fonction de u_0, H, E, R_0, R_1 et r, l'expression des composantes de $\boldsymbol{\sigma}^{(2)}$.
13. De la continuité de la contrainte normale à l'interface $r = R_0$ entre les deux cylindres déduire, en fonction de u_0, H, E, R_0 et R_1, l'expression des composantes de $\boldsymbol{\sigma}^{(1)}$.
14. Quelle est, en fonction de $\frac{\sigma_0}{E}$, la limite du ratio $\frac{u_0}{H}$ à ne pas excéder si l'on veut éviter l'apparition de déformations plastiques ?
    Application numérique $E = 200000$ MPa, $\sigma_0 = 360$ MPa.
15. La sollicitation mécanique étant maintenue, on soumet alors le cylindre $C^{(2)}$ à une augmentation de température ΔT. Quelle est alors, en fonction de u_0, H et du coefficient de dilatation thermique linéaire β, l'expression de ΔT permettant d'annuler la contrainte normale à l'interface $r = R_0$ entre les deux cylindres ? Que deviennent, dans ce cas, les expressions des composantes de $\boldsymbol{\sigma}^{(1)}$ et $\boldsymbol{\sigma}^{(2)}$?