E.N.T.P.E.
Département Mathématiques, Informatique et Physique

Cours de Mécanique des Milieux Continus ($1^{\text{ère}}$ année)
Devoir numéro 3
Durée 2 heures

Vendredi 12 Décembre 2008

Documents autorisés : Polycopié de cours et notes manuscrites personnelles.
Les archives (i.e. les documents antérieurs au début du cours) ne sont pas autorisées.

Problème : Attraction newtonienne et sources internes de chaleur au sein d'une sphère pleine
Une sphère pleine de rayon R est constituée d'un matériau homogène au comportement thermoélastique linéaire isotrope, de module d'Young E, de coefficient de Poisson $\nu = \frac{1}{4}$, de masse volumique ρ et de coefficient de dilatation thermique linéaire β. Les particules de la sphère s'attirant mutuellement selon la loi d'attraction newtonienne, on montre alors (il n'est pas demandé ici de le faire) que celle-ci est soumise à une densité massique de forces $\mathbf{b}$ ayant pour expression, dans le repère orthonormé direct local $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_\varphi})$ associé au système de coordonnées sphériques (r, θ, φ), $\mathbf{b} = -k\frac{r}{R}\overrightarrow{e_r}$ où k est une constante strictement positive donnée de dimension LT^{-2}. La sphère n'est par ailleurs soumise à aucune autre action mécanique extérieure (actions à distance ou actions de surface). Enfin, elle n'est dans un premier temps le siège d'aucune sollicitation thermique, sa température restant alors en tout point égale à celle T_{a} de l'air ambiant. En d'autres termes, il n'y a dans un premier temps aucune déformation d'origine thermique. On suppose alors, dans tout le problème et compte tenu des symétries de ce dernier, que le champ des déplacements exprimé relativement au système de coordonnées sphériques (r, θ, φ) adopte la forme $\mathbf{u} = u(r)\,\overrightarrow{e_r}$ où u est une fonction inconnue de la variable d'espace r que l'on se propose de déterminer.

1. Donner, en fonction de E, l'expression des modules de Lamé λ et μ.
2. Des équations de Lamé-Navier déduire que u est solution de l'équation différentielle ordinaire
$$u''(r) + 2\frac{u'(r)}{r} - 2\frac{u(r)}{r^2} = Cr \qquad r \in]0, R[\tag{1}$$
avec $C = \frac{5}{6}\frac{\rho k}{ER}$.
3. Montrer que l'équation différentielle ordinaire (1) admet une solution particulière $u^{(1)}(r)$ de la forme $u^{(1)}(r) = ar^\alpha$ puis donner, en fonction de $C = \frac{5}{6}\frac{\rho k}{ER}$ et après avoir évalué α, l'expression de la constante a. Chercher ensuite des solutions $u^{(0)}(r)$ de l'équation homogène associée sous la forme $u^{(0)}(r) = r^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}^\star$. En déduire alors, en fonction de C, r et de deux constantes d'intégration A et B, l'expression générale de $u(r)$.
4. Montrer que l'une des deux constantes d'intégration introduites à la question 3 ne peut être que nulle puis déterminer la seconde après avoir tiré parti des conditions aux limites en contrainte en $r = R$. On exprimera cette dernière en fonction de C et R.
5. Des résultats obtenus aux questions 3 et 4 déduire, en fonction de C, R et r, l'expression finale de $\mathbf{u}$ puis celle des composantes non nulles du tenseur linéarisé des petites déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$. Montrer alors qu'il existe une zone de la sphère où deux particules initialement situées sur un même rayon (i.e. θ et φ constants) se sont rapprochées l'une de l'autre tandis que dans la partie de la sphère complémentaire à cette zone deux particules initialement situées sur un même rayon se sont éloignées l'une de l'autre.
6. Donner, en fonction de ρ, k, R et r, l'expression des composantes non nulles du tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$. Le matériau obéissant au critère de limite élastique de Tresca, déduire alors, en fonction de ρ, k, R et de la limite élastique en traction simple σ_0, la condition de non plastification de la sphère.
7. On se propose à présent d'approcher $u(r)$ par une fonction linéaire $u_{\mathrm{a}}(r) = ar$, $a \in \mathbb{R}$. Donner alors, en tirant parti du théorème de l'énergie potentielle, la valeur optimale de a. Comparer ensuite $u_{\mathrm{a}}(R)$ et $u(R)$. Conclusion ?

La sphère, toujours soumise à la densité massique de forces $\mathbf{b} = -k\frac{r}{R}\overrightarrow{e_r}$, est à présent le siège d'une densité volumique Q donnée de sources internes de chaleur, indépendante des variables d'espace et de temps. Un régime permanent de conduction thermique s'étant établi, la température des particules de la sphère, initialement égale à celle T_a de l'air ambiant, devient alors une fonction $T(r)$ de la seule variable d'espace r, solution de l'équation différentielle ordinaire

$$\Lambda \Delta T(r) + Q \;=\; 0 \qquad r \in]0, R[\tag{2}$$

où Δ désigne l'opérateur différentiel laplacien et $\Lambda \in \mathbb{R}^{+\star}$ la conductivité thermique du matériau constituant la sphère. Enfin l'on admettra que pour un matériau thermoélastique linéaire isotrope, homogène et au repos, les équations de Lamé-Navier deviennent

$$(\lambda + 2\mu)\mathbf{grad}_x(\mathrm{div}_x\mathbf{u}) - \mu\mathbf{rot}_x(\mathbf{rot}_x\mathbf{u}) - (3\lambda + 2\mu)\beta\mathbf{grad}_x T + \rho\mathbf{b} \;=\; 0 \tag{3}$$

8. La température des particules de la sphère en contact avec l'air ambiant (i.e. en $r = R$) restant égale à T_a donner, après avoir tiré parti de (2) et de l'expression du laplacien en coordonnées sphériques fournie en page 321 du livre, l'expression de $T(r)$.
9. Le champ des déplacements adoptant toujours la forme $\mathbf{u} = u(r)\overrightarrow{e_r}$ montrer, en tirant parti de la relation (3) ainsi que des résultats obtenus aux questions 2, 3, 4, 5 et 8, que l'on peut déduire l'expression de $u(r)$ de celle trouvée à la question 5 en substituant simplement à la constante $C = \frac{5}{6}\frac{\rho k}{ER}$ une nouvelle constante C' dont on donnera l'expression en fonction de E, ρ, k, R, β, Q et Λ. En particulier, quelle valeur doit on donner à Q si l'on veut annuler $\mathbf{u}$?

Exercice : Viscosimètre plan-plan On considère l'écoulement permanent d'un film cylindrique fluide de rayon R et de faible épaisseur h entre deux plaques circulaires. La plaque inférieure est fixe tandis que la plaque supérieure est animée d'un mouvement de rotation uniforme à vitesse angulaire ω ainsi que l'illustre la figure 1. Les actions mécaniques à distance (forces de pesanteur) étant négligeables, on suppose que ω est suffisamment faible pour que les termes d'accélération le soient également. Le comportement de ce fluide visqueux non-newtonien incompressible est par ailleurs régi par la relation suivante : alors que pour un fluide visqueux newtonien incompressible le tenseur $\mathbf{D}$ des taux de déformation est proportionnel à celui des contraintes visqueuses $\boldsymbol{\sigma}^\mathrm{v}$ ($\mathbf{D} = \frac{1}{2\eta}\boldsymbol{\sigma}^\mathrm{v}$ où η est la viscosité dynamique de cisaillement), on a ici $\mathbf{D} = \frac{1}{2\eta_0}\frac{\|\boldsymbol{\sigma}^\mathrm{v}\|}{\sqrt{2}s_0}\boldsymbol{\sigma}^\mathrm{v}$ où $\eta_0 > 0$ et $s_0 > 0$ sont des constantes mécaniques caractéristiques du fluide.

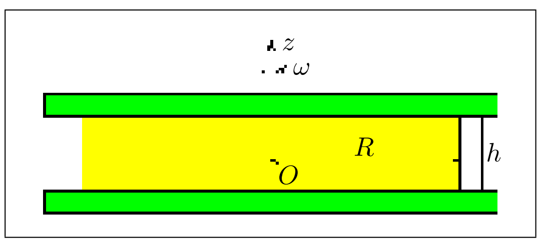

FIG. 1 – Viscosimètre plan-plan

On admet alors, compte tenu de ces hypothèses et de la géométrie du problème, que le champ des vitesses exprimé dans le repère local $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$ associé au système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) adopte la forme $\mathbf{v} = v(r, z)\overrightarrow{e_\theta}$, où v est une fonction inconnue des variables d'espace r et z que l'on se propose ici de déterminer. Enfin l'on désigne par p_atm la pression atmosphérique et par $p(r, z)$ celle du fluide.

1. Vérifier rapidement l'incompressibilité puis donner, en fonction de l'inconnue v, l'expression des composantes non nulles de $\mathbf{D}$.
2. Des résultats de la question 1 et de l'expression des équations de comportement déduire, sans toutefois chercher à les déterminer, que les seules composantes non nulles de $\boldsymbol{\sigma}$ sont, a priori, $\sigma_{r\theta}$, $\sigma_{\theta z}$ et $\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{zz} = -p$. Donner ensuite, après avoir tiré parti des équations indéfinies du mouvement en projection sur $\overrightarrow{e_r}$ et $\overrightarrow{e_z}$, l'expression de p.
3. On cherche une solution en vitesse sous la forme $v(r, z) = f(r)g(z)$. Montrer alors, en tirant parti des conditions aux limites en $z = 0$ et $z = h$, que $g(0) = 0$ et que f ne peut être qu'une fonction linéaire de r. En déduire alors que l'on a $D_{r\theta} = 0$ puis $\sigma_{r\theta} = 0$.
4. Montrer, en tirant parti des résultats obtenus à la question 3 ainsi que de l'équation indéfinie du mouvement en projection sur $\overrightarrow{e_\theta}$, que $\sigma_{\theta z}$ n'est fonction que de r. En déduire alors l'expression de $g(z)$ puis, en fonction de ω, h, r et z, celle de $v(r, z)$.
5. Des équations de comportement déduire enfin, en fonction de s_0, η_0, ω, h et r, l'expression finale de $\sigma_{\theta z}$.