E.N.T.P.E
Département Mathématiques, Informatique et Physique

Cours de Mécanique des Milieux Continus (1$^{\text{ère}}$ année)
Devoir numéro 2
Durée 2 heures

Vendredi 13 Novembre 2009

Documents autorisés : Polycopié de cours et notes manuscrites personnelles.
Les archives (i.e. les documents antérieurs au début du cours) ne sont pas autorisées.

Problème : Cisaillement d'un tube

Un tube de rayon intérieur r_0 et de rayon extérieur r_1 est constitué d'un matériau homogène au comportement élastique linéaire et isotrope, de module de cisaillement de Coulomb G. Ce matériau obéit au critère de limite élastique de Von Mises et l'on désigne par σ_0 sa limite élastique en traction simple. La paroi extérieure $r = r_1$ du tube est fixe tandis que sa paroi intérieure $r = r_0$ est soumise à des actions mécaniques extérieures de contact. Le tube n'est par ailleurs soumis à aucune action mécanique extérieure à distance. Enfin, dans tout le problème on exprimera les différents champs (déplacements, déformations, contraintes) relativement au repère local $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$ associé au système de coordonnées cylindriques (r, θ, z).

Première partie : cisaillement axial La paroi intérieure $r = r_0$ du tube est soumise à la densité surfacique uniforme de forces $\tau\,\vec{e_z}$.

1. Justifier que l'on cherche un champ des déplacements de la forme $\mathbf{u} = u_z(r)\,\vec{e_z}$.
2. Donner, en fonction de u_z et de G, l'expression des composantes non nulles du tenseur linéarisé des petites déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$ et du tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$.
3. Des équations indéfinies de l'équilibre déduire que l'on a $\sigma_{rz} = \frac{A}{r}$, puis donner l'expression de la constante A après avoir tiré parti des conditions aux limites en $r = r_0$.
4. Des résultats obtenus aux questions 2 et 3 ainsi que des conditions aux limites en $r = r_1$ déduire, en fonction de τ, G, r_0, r_1 et r, l'expression de $u_z(r)$.
5. Quelle est, en fonction de σ_0, la condition que τ doit satisfaire si l'on veut éviter l'apparition de déformations plastiques ?

Deuxième partie : cisaillement orthoradial La paroi intérieure $r = r_0$ du tube est à présent soumise à la densité surfacique uniforme de forces $\tau'\,\vec{e_\theta}$.

6. Justifier que l'on cherche un champ des déplacements de la forme $\mathbf{u} = u_\theta(r)\,\vec{e_\theta}$.
7. Donner, en fonction de u_θ, r et G, l'expression des composantes non nulles du tenseur linéarisé des petites déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$ et du tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$.
8. Des équations indéfinies de l'équilibre déduire l'équation différentielle ordinaire dont u_θ est solution.
9. Du résultat obtenu à la question 8 ainsi que des conditions aux limites en $r = r_0$ et $r = r_1$ déduire, en fonction de τ', G, r_0, r_1 et r, l'expression de $u_\theta(r)$. **Indication** On cherchera des solutions de l'équation différentielle ordinaire obtenue à la question 8 de la forme $u_\theta(r) = r^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Quelle est, en fonction de τ', G, r_0 et r_1, la rotation ω de la paroi intérieure du tube ?
10. Quelle est, en fonction de σ_0, la condition que τ' doit satisfaire si l'on veut éviter l'apparition de déformations plastiques ?

Troisième partie : cisaillement composé La paroi intérieure $r = r_0$ du tube est cette fois soumise à la densité surfacique uniforme de forces $\tau \overrightarrow{e_z} + \tau' \overrightarrow{e_\theta}$.

11. Des résultats obtenus dans les première et deuxième parties déduire, en les justifiant, les expressions du champ des déplacements $\mathbf{u}$ et du champ des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$.
12. Quelle est, en fonction de σ_0, la relation que τ et τ' doivent satisfaire si l'on veut éviter l'apparition de déformations plastiques ? Représenter, dans le système d'axes orthonormés d'abscisse τ et d'ordonnée τ', le domaine des sollicitations admissibles.
13. Déterminer les directions principales de contrainte et les contraintes principales aux points de la paroi intérieure du tube.

Exercice 1 : Sollicitation thermique d'une sphère creuse

Une sphère creuse de rayon intérieur r_0 et de rayon extérieur r_1 est constituée d'un matériau homogène au comportement thermoélastique linéaire et isotrope, de coefficient de dilatation thermique linéaire β. La sphère n'est soumise à aucune action mécanique extérieure (à distance ou de contact). La température de sa paroi intérieure $r = r_0$ est maintenue à sa valeur initiale T_0 tandis que sa paroi extérieure $r = r_1$, initialement à la température T_0, est soumise à une élévation de température δT jusqu'à l'obtention d'un régime permanent de conduction. Enfin, dans tout cet exercice on exprimera les différents champs (déplacements, déformations, contraintes) relativement au repère local $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_\varphi})$ associé au système de coordonnées sphériques (r, θ, φ).

1. Justifier que la température T ne dépend que de r, puis montrer que l'on a $T(r) = T_0 + \frac{r_1}{r_1 - r_0}(1 - \frac{r_0}{r})\delta T$.
   Indication Rappelons (cours d'énergétique) qu'en régime permanent de conduction et en l'absence de sources internes de chaleur la température est une fonction harmonique des variables d'espace (une fonction réelle f est harmonique si elle satisfait l'équation de Laplace $\Delta f = 0$).
2. Justifier que le champ des déplacements est de la forme $\mathbf{u} = u_r(r)\overrightarrow{e_r}$, puis montrer, sans toutefois chercher à le déterminer, que le champ tensoriel des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ est non nul en tout point de la sphère.
   Indication Montrer qu'en supposant $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$ l'on aboutit à une contradiction.

Exercice 2 : État de contrainte plane et fonction de contrainte

Un solide déformable est soumis à un état de contrainte plane relativement au plan euclidien (Ox_1, Ox_2). Les composantes non nulles σ_{11}, σ_{12} et σ_{22} du tenseur des contraintes planes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ étant des fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^2$ des variables d'espace x_1 et x_2, on suppose, dans tout cet exercice, qu'en tout point du solide l'on a $\sigma_{22} = -\sigma_{11}$ et que le solide à l'équilibre n'est soumis à aucune action mécanique extérieure à distance.

1. Montrer, en tirant parti des équations indéfinies de l'équilibre, que σ_{11} et σ_{12} sont des fonctions harmoniques des variables d'espace x_1 et x_2. (une fonction réelle f est harmonique si elle satisfait l'équation de Laplace $\Delta f = 0$).
2. On suppose qu'il existe une fonction réelle φ des variables d'espace x_1 et x_2 (fonction de contrainte) telle qu'en tout point du solide l'on ait $\sigma_{11} = \partial_1\varphi$ et $\sigma_{12} = \partial_2\varphi$. Montrer que les équations indéfinies de l'équilibre sont satisfaites si et seulement si φ est une fonction harmonique des variables d'espace x_1 et x_2.

Dans tout ce qui suit le solide est un tube de rayon intérieur r_0, de rayon extérieur r_1 et d'axe de révolution Ox_3 perpendiculaire au plan de contrainte (Ox_1, Ox_2). On considère alors la fonction de contrainte $\varphi(x_1, x_2) = \tau r_0 \ln r$, où τ est une contrainte donnée et où $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

3. Vérifier rapidement que φ est une fonction harmonique puis donner l'expression du tenseur des contraintes planes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ en tout point du tube.
4. Déterminer les actions mécaniques extérieures de contact s'exerçant sur les parois intérieure $r = r_0$ et extérieure $r = r_1$ du tube.
5. Déterminer les directions principales de contrainte et les contraintes principales en tout point du tube.