E.N.T.P.E
Département Mathématiques, Informatique et Physique

Cours de Mécanique des Milieux Continus (1$^{\text{ère}}$ année)
Devoir numéro 3
Durée 2 heures

Vendredi 18 Décembre 2009

Documents autorisés : Polycopié de cours et notes manuscrites personnelles.
Les archives (i.e. les documents antérieurs au début du cours) ne sont pas autorisées.

Problème : Mouvement d'un fluide visqueux newtonien dans une conduite cylindrique en caoutchouc

On s'intéresse au mouvement permanent d'un fluide visqueux newtonien et incompressible, de viscosité dynamique de cisaillement η, dans une conduite cylindrique en caoutchouc, d'axe de révolution Oz, de rayon intérieur r_0 et de rayon extérieur r_1 (figure 1). La paroi extérieure $r = r_1$ de cette conduite est solidaire d'une dalle en béton supposée indéformable. La première partie du problème est consacrée à l'étude du mouvement du fluide, tandis que la seconde est dédiée à l'analyse des déplacements et des contraintes induits par le fluide dans la conduite.

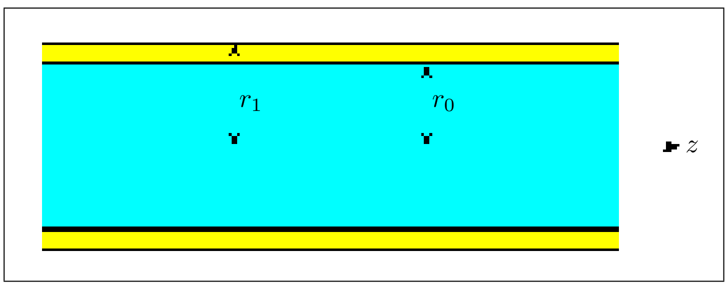

Fig. 1 – Mouvement d'un fluide visqueux newtonien dans une conduite cylindrique en caoutchouc

1 Première partie : étude du mouvement du fluide

Le fluide visqueux newtonien, de masse volumique ρ, est soumis, dans le repère local $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$ associé au système de coordonnées cylindriques (r, θ, z), au champ d'actions mécaniques extérieures à distance $\mathbf{b} = kr\,\vec{e_\theta}$, où k est une constante strictement positive donnée, de dimension T^{-2}. On conjecture alors que le champ des vitesses, exprimé dans ce même repère, adopte la forme $\mathbf{v} = v(r)\,\vec{e_\theta}$, où v est une fonction inconnue de la variable r que l'on se propose à présent de déterminer. Enfin l'on suppose, compte tenu de la symétrie de révolution du problème, que la pression p ne dépend que des variables d'espace r et z.

1. Dire, sans faire de calculs mais en le justifiant, quelle est la nature des trajectoires des particules fluides.
2. Vérifier rapidement l'incompressibilité puis montrer que le champ des accélérations a pour expression $\boldsymbol{\gamma} = -\frac{v^2(r)}{r}\,\vec{e_r}$.
3. De l'équation de Navier-Stokes en projection sur $\vec{e_\theta}$ déduire que v est solution de l'équation différentielle ordinaire $v''(r) + \frac{v'(r)}{r} - \frac{v(r)}{r^2} = -\frac{\rho k}{\eta} r,\ r \in]0, r_0[$.
4. Montrer que l'équation différentielle ordinaire obtenue à la question 3 admet une solution particulière $v^{(1)}(r)$ de la forme $v^{(1)}(r) = ar^\alpha$ puis donner, en fonction de ρ, k et η et après avoir évalué α, l'expression de la constante a. Chercher ensuite des solutions $v^{(0)}(r)$ de l'équation homogène associée sous la forme $v^{(0)}(r) = r^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}^\star$. En déduire alors, en fonction de ρ, k, η, r et de deux constantes d'intégration A et B, l'expression générale de $v(r)$.

5. Montrer que l'une des deux constantes d'intégration introduites à la question 4 ne peut être que nulle, puis déterminer la seconde après avoir tiré parti des conditions aux limites cinématiques en $r = r_0$. On exprimera cette dernière en fonction de ρ, k, η et r_0.
Indication La paroi extérieure $r = r_1$ de la conduite étant solidaire d'une dalle en béton supposée indéformable et le mouvement du fluide étant permanent, le caoutchouc constituant cette conduite, bien que déformé sous l'effet du mouvement du fluide, se trouve néanmoins dans un état d'équilibre.
6. Des résultats obtenus aux questions 4 et 5 déduire l'expression finale de v puis étudier ses variations en fonction de r. Pour quelle valeur r_m de r la vitesse v est-elle maximale ? Quelle est, en fonction de ρ, k, η et r_0, l'expression v_m de son maximum ?
7. Des équations de Navier-Stokes en projection sur $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_z$ ainsi que des résultats obtenus aux questions 2 et 6 déduire l'expression de la pression p, en supposant celle-ci nulle aux points de l'axe Oz. On exprimera p en fonction de ρ, k, η, r_0 et r. Étudier les variations de p en fonction de r.

Dans toute la suite de cette partie on désigne par $\mathcal{V}$ le volume fluide délimité par la paroi intérieure $r = r_0$ de la conduite et les plans $z = 0$ et $z = 1$.

8. Donner l'expression des tenseurs des taux de déformation $\mathbf{D}$ et des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ puis en déduire le moment résultant $C\vec{e_z}$ des actions mécaniques exercées par $\mathcal{V}$ sur la conduite. On exprimera C en fonction de ρ, k et r_0.
9. Des expressions de $\mathbf{D}$ et $\boldsymbol{\sigma}$ trouvées à la question 8 déduire, en fonction de ρ, k, η et r_0, l'expression de la puissance $\mathcal{P}^{\mathrm{i}}$ des efforts intérieurs dissipée dans $\mathcal{V}$.
10. Retrouver le résultat obtenu à la question 9 grâce au théorème de l'énergie cinétique.
Indication On rappelle que la dérivée matérielle de l'énergie cinétique $\mathcal{E}^{\mathrm{c}}$ n'est autre que la puissance dynamique $\mathcal{P}^{\mathrm{d}}$.
11. Soit ω la vitesse angulaire des particules situées sur les trajectoires $r = r_m$ où la vitesse est maximale (question 6), C le couple déterminé à la question 8 et $\mathcal{P}^{\mathrm{i}}$ la puissance des efforts intérieurs obtenue à la question 9. Vérifier que l'on a $\mathcal{P}^{\mathrm{i}} = \frac{1}{2}C\omega$.

2 Seconde partie : étude de la conduite

Le caoutchouc constituant la conduite est supposé élastique linéaire isotrope et incompressible, de module d'Young E, si bien que l'on a $\boldsymbol{\sigma} = \sigma_m\boldsymbol{\delta} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}$ où $\boldsymbol{\sigma}$ désigne le tenseur des contraintes de Cauchy, $\sigma_m = \frac{1}{3}\boldsymbol{\sigma}$ la contrainte moyenne, $\boldsymbol{\varepsilon}$ le tenseur linéarisé des petites déformations et où $\mu = \frac{1}{3}E$. La conduite n'étant soumise à aucune action mécanique extérieure à distance, on suppose que le champ des déplacements exprimé dans le repère local $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$ associé au système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) adopte la forme $\mathbf{u} = u(r)\,\vec{e_\theta}$, où u est une fonction inconnue de la variable r que l'on se propose à présent de déterminer.

12. Des équations de Lamé-Navier *(relations (5.107) page 233 du livre)* déduire que la contrainte moyenne σ_m est constante. Donner alors, après avoir tiré parti de la continuité de la contrainte radiale σ_{rr} à l'interface fluide-solide $r = r_0$, son expression en fonction de ρ, k, η et r_0.
13. Des équations de Lamé-Navier déduire à présent l'équation différentielle ordinaire dont u est solution. Résoudre ensuite cette équation en tirant parti de la continuité de la contrainte de cisaillement $\sigma_{r\theta}$ à l'interface fluide-solide $r = r_0$, puis des conditions aux limites cinématiques en $r = r_1$ (on rappelle que la paroi extérieure $r = r_1$ de la conduite est solidaire d'une dalle en béton supposée indéformable). On exprimera u en fonction de ρ, k, E, r_0, r_1 et r.
14. On cherche à approcher le déplacement $\mathbf{u}$ par un champ de la forme $\mathbf{w} = w(r)\,\vec{e_\theta}$ avec $w(r) = \alpha(r_1 - r)$. Vérifier qu'un tel champ est cinématiquement admissible puis déterminer, grâce au théorème de l'énergie potentielle, la valeur de la constante α. On donnera l'expression de α en fonction de ρ, k, E, r_0 et r_1.
15. On s'intéresse enfin à l'erreur relative $e = \frac{u(r_0)-w(r_0)}{u(r_0)}$. Montrer que e ne dépend que du ratio $\delta = \frac{r_1}{r_0}$ puis étudier ses variations en fonction de δ.
Application numérique Donner la valeur de e lorsque $r_1 = 2''$ et $r_0 = 1\frac{3}{4}''$.
16. **Question cadeau (de Noël)** Donner, en fonction de ρ, k, E, r_0 et r_1, l'expression de l'énergie de déformation $\mathcal{E}^{\mathrm{d}}$ par unité de longueur de la conduite. Conclusion ?