E.N.T.P.E
Département Mathématiques, Informatique et Physique

Cours de Mécanique des Milieux Continus (1$^{\text{ère}}$ année)
Épreuve de rattrapage
Durée 2 heures

Mardi 31 Août 2010

Documents autorisés : Polycopié de cours et notes manuscrites personnelles.
Les archives (i.e. les documents antérieurs au début du cours) ne sont pas autorisées.

Exercice 1 : Essai de compression œdométrique

Un matériau homogène et compressible, au comportement élastique linéaire et isotrope, de faible module d'Young E et de coefficient de Poison ν, est placé à l'intérieur d'un moule cylindique indéformable, comme l'illustre la figure 1. Le frottement au contact des parois du moule est négligeable. Au moyen d'un piston, on exerce à la surface du matériau une pression p. Enfin, l'on néglige les actions mécaniques à distance.

Calculer, en fonction de p, E et ν, la dilatation subie par le matériau dans la direction verticale Oz puis, en fonction de p et ν, la pression qu'exerce celui-ci sur les parois du moule.

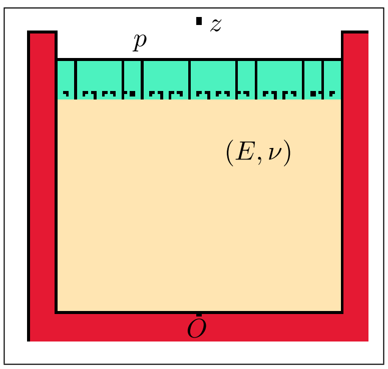

Fig. 1 – Essai de compression œdométrique

Exercice 2 : Transformation élastique infinitésimale

Un cylindre creux d'axe de révolution Ox_3, constitué d'un milieu élastique linéaire isotrope, de module de Lamé μ, est soumis à une transformation infinitésimale caractérisée, relativement au système de coordonnées cartésiennes (x_1, x_2, x_3), par le champ des déplacements

$$\begin{cases} u_1 &= -\dfrac{\alpha x_2}{r^2} \\ u_2 &= \dfrac{\alpha x_1}{r^2} \\ u_3 &= 0 \end{cases}$$

où $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ et où $\alpha \ll 1$ est une constante strictement positive donnée de dimension L^2.

1. Donner l'expression des composantes non nulles du tenseur linéarisé des petites déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$ puis celles du tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$.
2. Donner l'expression de $\boldsymbol{\sigma}$ dans le repère local $(O, \vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$ associé au système de coordonnées cylindriques (r, θ, z), puis vérifier que l'équilibre du solide est possible sans actions mécaniques à distance.

Exercice 3 : Critère de limite élastique de Stassi d'Alia

Le critère de limite élastique de Stassi d'Alia a pour expression

$$(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2+C_1(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)+C_2=0$$

où σ_1, σ_2 et σ_3 désignent les contraintes principales et où C_1 et C_2 sont deux constantes mécaniques caractéristiques du matériau. On désigne enfin respectivement par σ_1^{c} et σ_1^{t} les limites élastiques en compression et en traction simple.

1. Donner, en fonction de σ_1^{c} et σ_1^{t}, l'expression des constantes mécaniques C_1et C_2.
2. Montrer que pour des états de déformation plane ($\varepsilon_3=0$) et lorsque $\nu=\frac{1}{2}$ le critère de limite élastique de Stassi d'Alia a pour expression $3(\sigma_1-\sigma_2)^2+3C_1(\sigma_1+\sigma_2)+2C_2=0$ puis donner l'expression de la courbe limite dans le plan du tricercle de Mohr d'abscisse σ_{nn} (contrainte normale) et d'ordonnée τ_n (contrainte de cisaillement), en fonction de σ_{nn}, τ_n, C_1 et C_2. Quelle est la nature de cette courbe ?

Exercice 4 : Écoulement dans une conduite cylindrique

Une conduite cylindrique de révolution est, à gauche d'une section (S_1), divisée par un plan passant par son axe Oz, ainsi que l'illustre la figure 2. L'une des moitiés est alimentée par de l'eau animée d'une vitesse v_1, l'autre par de l'eau animée de la vitesse $\frac{1}{2}v_1$. À droite de (S_1), après une zone perturbée, l'écoulement est redevenu uniforme dans une section (S_2). L'eau est supposée incompressible et l'on néglige le frottement entre celle-ci et la conduite ainsi que les actions mécaniques à distance. On admet enfin que dans chacune des sections (S_1) et (S_2) la pression est constante.

Calculer, en fonction de v_1, la vitesse v_2 dans la section (S_2) puis, en fonction de v_1 et de la masse volumique ρ de l'eau, la différence de pression p_2-p_1.

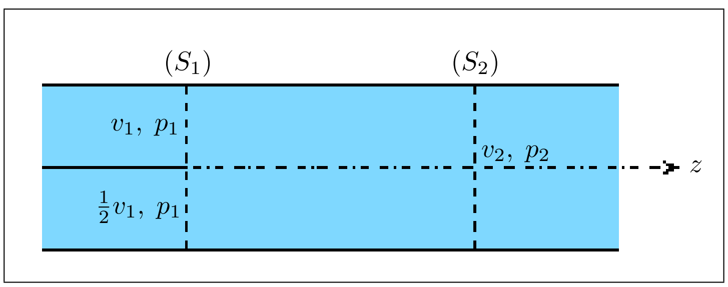

Fig. 2 – Écoulement dans une conduite cylindrique

Exercice 5 : Écoulements d'un fluide visqueux newtonien

On considère des écoulement d'un fluide visquex newtonien, de masse volumique ρ et de viscosité dynamique de cisaillement η, caractérisés, relativement au système de coordonnées cartésiennes (x_1,x_2,x_3) , par le champ eulérien des vitesses

$$\left\{\begin{array}{lcl} v_1 & = & -\dfrac{x_2}{r}h(r) \\ v_2 & = & \dfrac{x_1}{r}h(r) \\ v_3 & = & k(r) \end{array}\right.$$

où $r=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$ et où $r\mapsto h(r)$ et $r\mapsto k(r)$ sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ de la variable r.

1. Montrer que l'écoulement s'effectue à volume constant.
2. L'axe Ox_3 étant vertical ascendant et les actions mécaniques à distance étant réduites aux forces gravifiques, montrer qu'il existe des tels écoulements en donnant, relativement au système de coordonnées cylindriques (r,θ,z), l'expression de la pression p au sein du fluide, cette dernière étant supposée indépendante de θ (justifier). On exprimera p en fonction de ρ, r, z et de quatre constantes arbitraires.