E.N.T.P.E
Département Mathématiques, Informatique et Physique

Cours de Mécanique des Milieux Continus (1$^{\text{ère}}$ année)
Devoir numéro 2
Durée 2 heures

Lundi 15 Novembre 2010

Documents autorisés : Polycopié de cours et notes manuscrites personnelles.
Les archives (i.e. les documents antérieurs au début du cours) ne sont pas autorisées.
Les calculatrices et autres dispositifs électroniques ne sont pas autorisés.

Premier petit exercice : vecteurs contrainte

Soit, au point P_t de la configuration actuelle Ω_t, $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ deux vecteurs unitaires non liés, $\vec{\sigma_n}$ et $\vec{\sigma_{n'}}$ les vecteurs contrainte s'exerçant sur les facettes de normales respectives $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ et soit $\vec{n''}$ un vecteur unitaire orthogonal à la fois à $\vec{\sigma_n}$ et $\vec{\sigma_{n'}}$. Que peut-on dire de la direction du vecteur contrainte $\vec{\sigma_{n''}}$ s'exerçant sur la facette de normale $\vec{n''}$?

Deuxième petit exercice : contraintes principales

Au point P_t de la configuration actuelle Ω_t, le tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ a pour composantes $\sigma_{ij} = \alpha + \beta\delta_{ij},\ (i,j) \in \{1,2,3\}^2$, avec $\alpha\beta \neq 0$. Déterminer les contraintes principales et les directions principales de contrainte associées.
Indication On évitera le calcul un peu fastidieux du polynôme caractéristique en remarquant que la matrice représentative de $\boldsymbol{\sigma}$ a une direction propre évidente.

Troisième petit exercice : enveloppe métallique sphérique

Une enveloppe métallique sphérique, de diamètre d et d'épaisseur e tels que $\frac{e}{d} \ll 1$, est emplie d'un fluide engendrant une surpression p.

1. En s'inspirant du problème P3.1 du cours donner, dans le repère local $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_\varphi})$ associé au système de coordonnés sphériques (r, θ, φ) et en négligeant les termes en $\frac{e}{d}$ devant l'unité, l'expression du tenseur des contraintes de Cauchy aux points de l'enveloppe métallique situés sur la paroi intérieure puis sur la paroi extérieure.
2. Le métal obéissant au critère de limite élastique de Tresca de limite en traction simple σ_0 donner, en fonction de σ_0, d et e, l'expression p_l de p à la limite élastique.
   Application numérique $d = 1\,\mathrm{m}$, $e = 1\,\mathrm{cm}$ et $\sigma_0 = 390\,\mathrm{MPa}$

Premier petit problème : solide élastique

Un cylindre, de génératrices parallèles à l'axe Ox_3, de sections droites elliptiques de demi grand axe de longueur a dans la direction Ox_1 et de demi petit axe de longueur b dans la direction Ox_2, a pour base supérieure $x_3 = h$ et pour base inférieure $x_3 = -h$. Ce solide, constitué d'un matériau homogène au comportement élastique linéaire isotrope, de module de cisaillement de Coulomb G, est à l'équilibre sous l'effet d'actions mécaniques extérieures induisant le champ de déplacement

$$\mathbf{u} = -\alpha x_2 x_3 \vec{e_1} + \alpha x_3 x_1 \vec{e_2} + \beta x_1 x_2 \vec{e_3}$$

où $\alpha \ll 1$ et $\beta \ll 1$ sont deux constantes données de dimension L^{-1}.

1. Donner l'expression du tenseur linéarisé des petites déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$ puis celle du tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$.
2. Que vaut le champ des actions mécaniques extérieures à distance $\mathbf{b}$?
3. Montrer que la résultante des actions mécaniques extérieures de contact s'exerçant sur la base supérieure (resp$^{\mathrm{t}}$ inférieure) est nulle et que son moment résultant aux points de l'axe Ox_3 vaut $\Gamma \vec{e_3}$ (resp$^{\mathrm{t}}$ $-\Gamma \vec{e_3}$) avec $\Gamma = \frac{\Pi G}{4} ab[(\alpha + \beta)a^2 + (\alpha - \beta)b^2]$.
   Indication On gagnera, pour l'évaluation des intégrales, à faire le changement de variables $x_1 = ar\cos\theta$, $x_2 = br\sin\theta$ avec $r \in [0, 1]$ et $\theta \in [0, 2\Pi[$.
4. Montrer que la normale sortante aux points de la paroi latérale du solide a pour expression $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{b^4 x_1^2 + a^4 x_2^2}}(b^2 x_1 \vec{e_1} + a^2 x_2 \vec{e_2})$ puis donner l'expression de la densité surfacique de forces s'exerçant sur cette paroi. Déterminer ensuite β afin que cette dernière soit nulle. Quelle est alors, dans ce cas, l'expression de Γ ?
5. La constante β étant celle déterminée à la question 4, donner l'expression liant Γ à l'angle ω dont a tourné, autour de l'axe Ox_3, la base supérieure par rapport à la base inférieure.

Second petit problème : écoulement d'un fluide visqueux newtonien

Au sein d'un fluide visqueux newtonien incompressible, de viscosité dynamique de cisaillement η et de masse volumique ρ, le champ eulérien des vitesses a pour expression

$$\mathbf{v} = \alpha a \vec{e_1} - (ab\mathrm{e}^{ax_1} + 2cx_1 + d)\vec{e_2}$$

où α est une constante donnée de dimension $\mathrm{L}^2\mathrm{T}^{-1}$, a une constante donnée de dimension L^{-1}, b une constante donnée de dimension $\mathrm{L}^2\mathrm{T}^{-1}$, c une constante donnée de dimension T^{-1} et d une constante donnée de dimension LT^{-1}.

1. Donner l'expression du tenseur des taux de déformation $\mathbf{D}$ puis celle du tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$.
2. Donner l'expression du champ des accélérations $\boldsymbol{\gamma}$.
3. Des équations indéfinies eulériennes du mouvement déduire qu'en l'absence d'actions mécaniques à distance l'écoulement n'est possible que si $\alpha = \frac{\eta}{\rho}$. Quelle est alors, dans ce cas, l'expression de la pression p ?