E.N.T.P.E
Département Mathématiques, Informatique et Physique

Cours de Mécanique des Milieux Continus (1$^{\text{ère}}$ année)
Devoir numéro 3
Durée 2 heures

Vendredi 17 Décembre 2010

Documents autorisés : Polycopié de cours et notes manuscrites personnelles.
Les archives (i.e. les documents antérieurs au début du cours) ne sont pas autorisées.
Les calculatrices et autres dispositifs électroniques ne sont pas autorisés.

Premier petit problème : Transformation d'un cube élastique

Un cube d'arête de longueur a est soumis, en l'absence d'actions mécaniques extérieures à distance, à des actions mécaniques extérieures de contact induisant la transformation plane illustrée par la figure 1, et telles que les contraintes normales s'exerçant sur sa face supérieure soient nulles. Le cube est constitué d'un matériau homogène au comportement élastique linéaire

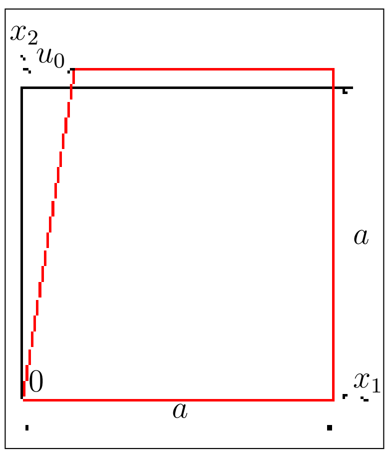

FIG. 1 – Transformation d'un cube élastique

isotrope, de modules de Lamé λ et μ. On conjecture alors qu'à l'équilibre sous l'effet de ces actions mécaniques extérieures le champ des déplacements aux points du cube adopte la forme $\mathbf{u} = \alpha x_2(a - x_1)\overrightarrow{e_1} + u_2(x_1, x_2)\overrightarrow{e_2}$ où u_2 est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ des variables d'espace x_1 et x_2 et où $\alpha = \frac{u_0}{a^2}$.

1. Justifier, en une phrase, la conjecture faite pour le déplacement horizontal u_1.
2. Donner, en fonction de a, α, x_1, x_2 et u_2, l'expression du tenseur linéarisé des petites déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$ puis, en fonction cette fois de a, α, x_1, x_2, u_2, λ et μ, celle du tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$.
3. De l'équation indéfinie de l'équilibre en projection sur l'axe Ox_1 déduire que l'on a nécessairement $u_2(x_1, x_2) = f(x_1) + g(x_2)$ où f et g sont deux fonctions que l'on se propose à présent de déterminer.

4. Des conditions aux limites cinématiques sur la face inférieure du cube déduire que f est la fonction constante égale à $-g(0)$.
5. De l'équation indéfinie de l'équilibre en projection sur l'axe Ox_2 déduire l'équation différentielle ordinaire dont g est solution.
6. Donner, en fonction de α, x_2, λ, μ et de deux constantes d'intégration A et B, l'expression de $g(x_2)$. Montrer ensuite, en considérant le déplacement vertical u_2 et en tirant parti du résultat obtenu à la question 4, que seule l'une de ces deux constantes est à déterminer. Donner alors, en fonction de α, a, λ et μ et en tirant parti de la nullité de la contrainte normale sur la face supérieure du cube, l'expression de cette constante.
7. Donner enfin, en fonction de α, a, x_2, λ et μ, l'expression du déplacement vertical u_2. Pour quelle valeurs du coefficient de Poisson ν le déplacement vertical de la face supérieure du cube est-il conforme à ce que suggère la figure 1.
8. Donner, en fonction de α, a, x_1, x_2, λ et μ, l'expression des composantes non nulles de $\boldsymbol{\sigma}$.

Second petit problème : Écoulement permanent d'un fluide visqueux newtonien dans une conduite cylindrique

On considère, dans l'espace physique $\mathbb{R}^3$ rapporté au repère orthonormé fixe $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, une conduite cylindrique de génératrices parallèles à l'axe Ox_3 et de sections droites d'équations $\{x_3 = \text{cste}, 0 \leq f(x_1, x_2) \leq 1\}$ où f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ des variables d'espace x_1 et x_2 telle que $f(0,0) = 0$. Les frontières de ces sections droites ont alors pour équations $\{x_3 = \text{cste}, f(x_1, x_2) = 1\}$. Dans cette conduite s'écoule un fluide incompressible et homogène au comportement visqueux newtonien, de viscosité dynamique de cisaillement η. Les actions mécaniques à distance étant ici négligées, on suppose que le champ des vitesses exprimé en coordonnées cartésiennes adopte la forme $\mathbf{v} = v(x_1, x_2, x_3)\,\vec{e_3}$ où v est une fonction réelle dépendant a priori des variables d'espace x_1, x_2 et x_3.

1. Montrer que v n'est fonction que des variables d'espace x_1 et x_2 puis en déduire que le champ $\boldsymbol{\gamma}$ des accélérations est nul.
2. Des équations de Navier-Stokes déduire que la pression p ne dépend que de x_3 et que son gradient est constant. On pose alors, dans tout ce qui suit, $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x_3} = -G$ et l'on choisit $G > 0$ de façon à ce que le fluide s'écoule dans le sens des x_3 positifs.
3. Donner l'équation aux dérivées partielles que doit satisfaire v. Les équations cartésiennes des sections droites de la conduite suggérant de chercher v sous la forme $v(x_1, x_2) = h(y)$ avec $y = f(x_1, x_2)$, dire alors quelle condition doit satisfaire la fonction h en $y = 1$ puis donner, en fonction de G, η, $\mathbf{grad}_x f$ et $\Delta_x f$ mais sans toutefois chercher à la résoudre, l'équation différentielle ordinaire dont h est solution.
4. Soit S l'aire des sections droites de la conduite. Du théorème d'Euler déduire, en fonction de G et S, la force de frottement F qu'exerce le fluide sur les parois de la conduite par unité de longueur dans la direction Ox_3.
5. On désigne à présent par Q le débit volumique du fluide à travers les sections droites de la conduite. Du théorème de l'énergie cinétique déduire alors, en fonction de G et Q, la puissance $\mathcal{P}^{\mathrm{i}}$ des efforts intérieurs dissipée dans un volume fluide compris entre deux sections droites distantes d'une unité de longueur.