# E.N.T.P.E
# Département Mathématiques, Informatique et Physique

**Cours de Mécanique des Milieux Continus (1ère année)**
**Épreuve de rattrapage**
**Durée 2 heures**

**Jeudi 16 Juin 2011**

**Documents autorisés :** Polycopié de cours et notes manuscrites personnelles.
*Les archives (i.e. les documents antérieurs au début du cours) ne sont pas autorisées.*
*Les calculatrices et autres dispositifs électroniques ne sont pas autorisés.*

## Problème : Essai de compression fretté

Une éprouvette cylindrique de rayon $R$ et de demi-hauteur $H$ est soumise à un essai de compression fretté (i.e. les déplacements radiaux en $z = \pm H$ sont totalement empêchés) ainsi que l'illustre la figure 1 où le contour en trait discontinu est celui de l'échantillon dans sa configuration initiale tandis que le domaine bleu représente sa configuration déformée à l'état d'équilibre final.

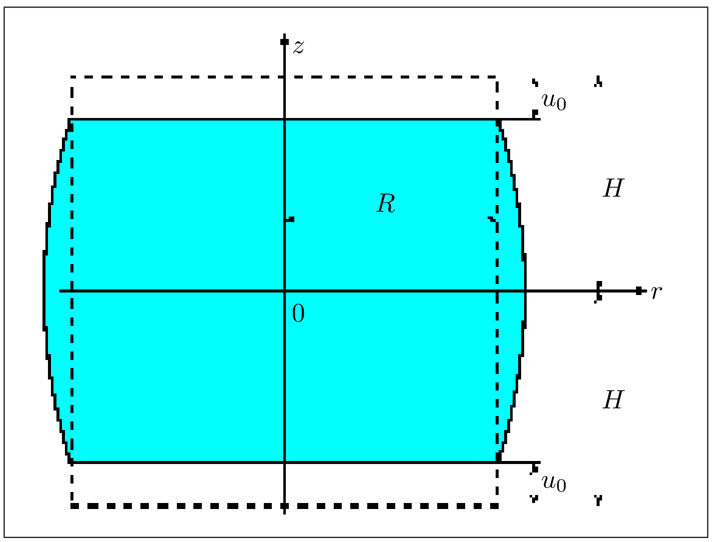


FIG. 1 – Essai de compression fretté

Cette éprouvette est constituée d'un matériau non pesant ayant un comportement élastique linéaire isotrope, de modules de Lamé $\lambda$ et $\mu$. On suppose alors, compte tenu de la géométrie du problème, que le champ des déplacements exprimé dans le repère local $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$ associé au système de coordonnées cylindriques $(r, \theta, z)$ adopte la forme $\mathbf{u} = u_r(r,z)\,\overrightarrow{e_r} + u_z(z)\,\overrightarrow{e_z}$, où $= u_r$ (resp$^{\mathrm{t}}$ $= u_z$) est une fonction inconnue des variables d'espace $r$ et $z$ (resp$^{\mathrm{t}}$ de la seule variable d'espace $z$).

1. Montrer, en tirant parti des équations de Lamé-Navier (utiliser la variante (5.106) page 233 du livre), que $u_r$ et $u_z$ sont solutions d'un système de deux équations aux dérivées partielles que l'on explicitera.

Dans toute la suite du problème on choisit d'approcher $u_z$ par la fonction linéaire $z \mapsto -\frac{u_0}{H} z$.

2. Montrer que cette approximation de $u_z$ satisfait les conditions aux limites cinématiques en $z = \pm H$ ainsi que les exigences de symétrie du problème en $z = 0$ puis en donner une interprétation physique. Selon vous, l'hypothèse ainsi faite est-elle vraisemblable ?
3. De l'équation de Lamé-Navier en projection sur $\overrightarrow{e_z}$ ainsi que des exigences de symétrie du problème en $r = 0$ déduire que l'approximation précédente de $u_z$ implique $\partial_z u_r = 0$. Montrer ensuite, en tirant cette fois parti des conditions aux limites cinématiques en $z = \pm H$, que l'on a nécessairement $u_r = 0$. Vérifier enfin que cette expression de $u_r$ satisfait l'équation de Lamé-Navier en projection sur $\overrightarrow{e_r}$.
4. Montrer, en tirant à présent parti des conditions aux limites en contrainte en $r = R$ (paroi latérale libre de l'éprouvette), que la solution obtenue à l'issue de la question 3 n'est acceptable que pour une valeur particulière du coefficient de Poisson $\nu$ que l'on déterminera. Justifier alors, par un raisonnement physique, le caractère éminemment prévisible de ce résultat.

L'approximation précédente de $u_z$ par la fonction linéaire $z \mapsto -\frac{u_0}{H} z$ étant conservée, on choisit, dans tout ce qui suit et compte tenu de l'allure de la déformée de l'échantillon en $r = R$ (voir la figure 1), d'approcher $u_r$ par la fonction $(r, z) \mapsto ar(H^2 - z^2)$ où $a$ est une constante que l'on se propose de déterminer. Bien que les questions 3 et 4 nous aient appris que ces deux approximations ne satisfont les équations de Lamé-Navier et l'ensemble des conditions aux limites que pour la valeur triviale $a = 0$ et pour une valeur particulière de $\nu$, on se propose de trouver une valeur optimale de $a$ grâce au théorème de l'énergie potentielle.

5. Montrer que l'approximation précédente de $u_r$ satisfait les conditions aux limites cinématiques en $z = \pm H$ ainsi que les exigences de symétrie du problème en $r = 0$.
6. Des approximations précédentes de $u_r$ et $u_z$ déduire, en fonction de $u_0$, $H$, $a$, $r$ et $z$, l'expression des composantes non nulles du tenseur linéarisé des petites déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$. En déduire ensuite, en fonction de ces mêmes grandeurs ainsi que des modules de Lamé $\lambda$ et $\mu$, celle de l'énergie locale de déformation élastique $w = \frac{1}{2}[\lambda\theta^2 + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\varepsilon}]$ où $\theta = \mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon}$.
7. Montrer, en tirant parti du théorème de l'énergie potentielle et plus précisément de la remarque 1 du livre page 239, que la valeur optimale de $a$ minimise la fonction $g(a) = \int_{-H}^{+H} \int_0^R w(r, z) 2\Pi r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}z$.
8. Evaluer g(a) puis déterminer, dans le cas où $R = H$, la valeur optimale $a_{\text{opt}}$ de $a$. On donnera l'expression finale de $a_{\text{opt}}$ en fonction de $u_0$, $H$ et $\nu$.
9. Les variations de $a_{\text{opt}}$ avec $\nu$ sont-elles conformes à ce que laisse prédire l'intuition ? Enfin, l'expression trouvée est-elle compatible avec les résultats de la question 4 ?

## Exercice 1 : Écoulement dans une conduite cylindrique

Une conduite cylindrique de révolution est, à gauche d'une section $(S_1)$, divisée par un plan passant par son axe $Oz$, ainsi que l'illustre la figure 2. L'une des moitiés est alimentée par de l'eau animée d'une vitesse $\frac{1}{3}v_1$, l'autre par de l'eau animée de la vitesse $\frac{2}{3}v_1$. À droite de $(S_1)$, après une zone perturbée, l'écoulement est redevenu uniforme dans une section $(S_2)$. L'eau est supposée incompressible et l'on néglige le frottement entre celle-ci et la conduite ainsi que les actions mécaniques à distance. On admet enfin que dans chacune des sections $(S_1)$ et $(S_2)$ la pression est constante.

Calculer, en fonction de $v_1$, la vitesse $v_2$ dans la section $(S_2)$ puis, en fonction de $v_1$ et de la masse volumique $\rho$ de l'eau, la différence de pression $p_2 - p_1$.

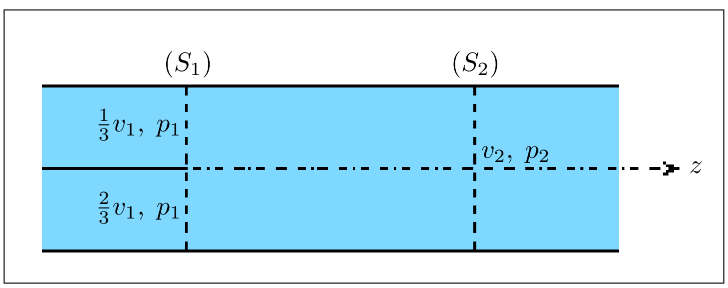


Fig. 2 – Écoulement dans une conduite cylindrique

## Exercice 2 : Écoulements d'un fluide visqueux newtonien

On considère des écoulements d'un fluide visquex newtonien, de masse volumique $\rho$ et de viscosité dynamique de cisaillement $\eta$, caractérisés, relativement au système de coordonnées cartésiennes $(x_1, x_2, x_3)$ , par le champ eulérien des vitesses

$$\begin{cases} v_1 &= \dfrac{x_2}{r} h(r) \\ v_2 &= -\dfrac{x_1}{r} h(r) \\ v_3 &= k(r) \end{cases}$$

où $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ et où $r \mapsto h(r)$ et $r \mapsto k(r)$ sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ de la variable $r$.

1. Montrer que l'écoulement s'effectue à volume constant.
2. L'axe $Ox_3$ étant vertical ascendant et les actions mécaniques à distance étant réduites aux forces gravifiques, montrer qu'il existe des tels écoulements en donnant, relativement au système de coordonnées cylindriques $(r, \theta, z)$, l'expression de la pression $p$ au sein du fluide, cette dernière étant supposée indépendante de $\theta$ (justifier). On exprimera $p$ en fonction de $\rho$, $r$, $z$ et de quatre constantes arbitraires.