PROBLEME

Soient $(x_0, X) \in \mathbb{R}^2$ avec $x_0 < X$ et $f \in C^2([x_0, X]\times\mathbb{R})$, L-lipschitzienne par rapport à son deuxième argument. On considère l'équation différentielle $y'(x) = f(x, y(x))$ avec la condition initiale $y(x_0) = y_0$. On considère une subdivision $x_0 < x_1 < \ldots < x_n < x_{n+1} < \ldots < x_N = X$ de l'intervalle $[x_0, X]$, de pas constant h. Soit $\theta \in [0, 1]$, on note y_n l'approximation numérique de $y(x_n)$ et on définit la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par l'algorithme appelé θ-schéma :

$$y_{n+1} = y_n + h[\theta f(x_n, y_n) + (1-\theta) f(x_{n+1}, y_{n+1})]$$

(1pt) 1. Déterminer pour quelle valeur de θ ce schéma est implicite et pour quelle valeur de θ il est explicite.

Dans la suite de l'exercice on suppose que θ est tel que le θ-schéma soit implicite. Par conséquent le calcul de y_{n+1} à partir de θ, x_n, h_n et y_n nécessite la résolution d'une équation de la forme :

$$s = r + h[\theta f(x, r) + (1-\theta) f(x+h, s)] \tag{1}$$

où s est l'inconnue et r, x, h, θ sont quatre paramètres.

(2pt) 2. On note g_θ la fonction définie par $g_\theta(x, r, s, h) = r + h[\theta f(x, r) + (1-\theta) f(x+h, s)]$. Montrer que si $h < \dfrac{1}{L(1-\theta)}$, la fonction $s \mapsto g_\theta(x, r, s, h)$ admet un unique point fixe qu'on notera $G_\theta(x, r, h)$.

(2pt) 3. En déduire l'expression du θ-schéma sous la forme $y_{n+1} = y_n + h\Phi_\theta(x_n, y_n, h)$ où la fonction $(x, y, h) \mapsto \Phi_\theta(x, y, h)$ sera explicitée en fonction de x, y, h, f et G_θ.

(2pt) 4. Montrer que la fonction G_θ est continue et quelle est lipschitzienne par rapport à son deuxième argument.

(3pt) 5. Montrer que θ-schéma est convergent.

(4pt) 6. Déterminer l'ordre du θ-schéma en fonction de θ.

(1pt) 7. Quelle approximation classique de l'intégrale faut-il utiliser dans l'équation

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x))\, dx$$

pour retrouver le θ-schéma d'ordre 2 ?