E.N.T.P.E
Département Mathématiques, Informatique et Physique

Cours de Mécanique des Milieux Continus (1ère année)
Devoir numéro 1
Durée 2 heures

Mercredi 5 Octobre 2011

Documents autorisés : *Aucun document n'est autorisé, à l'exception du formulaire au format A4 (annexe B du cours).*
Les calculatrices et autres dispositifs électroniques ne sont pas autorisés.

Premier petit problème : Étude d'une transformation plane

Dans tout le problème on limitera l'étude de la transformation au plan $X_3 = 0$.

On donne, dans l'espace physique $\mathbb{R}^3$ rapporté au repère orthonormé direct $R = (O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, le champ eulérien des vitesses

$$\left\{\begin{array}{lcl} v_1 & = & \alpha t x_1 \\ v_2 & = & -\alpha t x_2 \\ v_3 & = 0 & \end{array}\right. \tag{1}$$

où $t \geq 0$ désigne la variable temps et où α est une constante strictement positive donnée, de dimension T^{-2}. L'instant $t = 0$ étant choisi comme instant de référence, on désignera par (X_1, X_2, X_3) les coordonnées à cet instant d'une particule donnée P et par (x_1, x_2, x_3) les coordonnées de cette même particule à l'instant t.

1. Donner l'équation cartésienne des lignes de courant puis les représenter.
2. Montrer que la transformation s'effectue à volume constant.
3. Montrer que l'écoulement est irrotationnel.
4. Donner l'expression eulérienne du champ des accélérations.
5. De la résolution du du système différentiel à conditions "initiales"

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{d}x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{v}(\vec{x}, t) \ \ \forall t \geq 0, \qquad \vec{x}\ (0) = \vec{X} \tag{2}$$

déduire que la transformation a pour expression

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & X_1 \, \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\alpha t^2} \\ x_2 & = & X_2 \, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\alpha t^2} \\ x_3 & = & X_3 \end{array}\right. \tag{3}$$

6. Donner l'équation cartésienne des trajectoires. Selon vous, pour quelle raison ces dernières sont-elles confondues avec les lignes de courant bien que l'écoulement ne soit pas stationnaire ?

7. Donner l'expression du tenseur de Cauchy à droite puis celle du tenseur de Green-Lagrange.
8. Soient $\vec{N}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e_1}+\vec{e_2})$ et $\vec{T}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e_1}-\vec{e_2})$. Donner les expressions de la dilatation ε_{NN} dans la direction $\vec{N}$, de la dilatation ε_{TT} dans la direction $\vec{T}$ puis de la distorsion γ_{NT} entre les directions $\vec{N}$ et $\vec{T}$. Représenter les variations de cette dernière en fonction du temps. Vers quelle limite tend cette distorsion lorsque t tend vers $+\infty$?
9. Donner l'équation, de paramètre $t' \in [0,t]$, de la ligne d'émission à l'instant t du point de coordonnées $(x_1 = 1, x_2 = 1)$, puis en déduire son équation cartésienne et la représenter.

Second petit problème : Étude d'un écoulement stationnaire

On donne, dans l'espace physique $\mathbb{R}^3$ rapporté au repère orthonormé direct $R = (O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, le champ eulérien des vitesses

$$\left\{\begin{array}{rcl} v_1 &=& \alpha\frac{x_1^2-x_2^2}{(x_1^2+x_2^2)^2} \\ v_2 &=& \alpha\frac{2x_1x_2}{(x_1^2+x_2^2)^2} \\ v_3 &=& 0 \end{array}\right. \tag{4}$$

où α est une constante strictement positive donnée, de dimension $\mathrm{L}^3\mathrm{T}^{-1}$.

1. Montrer que dans le repère local $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$ associé au système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) où les axes Ox_3 et Oz coïncident le champ des vitesses $\mathbf{v}$ a pour composantes

$$\left\{\begin{array}{rcl} v_r &=& \alpha\frac{\cos\theta}{r^2} \\ v_\theta &=& \alpha\frac{\sin\theta}{r^2} \\ v_z &=& 0 \end{array}\right. \tag{5}$$

2. Montrer que l'écoulement est irrotationnel puis donner l'expression du potentiel des vitesses φ.
3. Montrer que l'écoulement est incompressible.
4. Comme l'écoulement est plan et incompressible, il existe une fonction vectorielle $\boldsymbol{\psi}$, indépendante de z et telle que $\mathbf{v} = \mathbf{rot}_x\boldsymbol{\psi}$. Montrer qu'il existe alors une fonction scalaire ψ, appelée fonction de courant et telle que l'on ait $v_r = \frac{1}{r}\partial_\theta\psi$ et $v_\theta = -\partial_r\psi$. Donner ensuite l'expression de cette fonction.
5. Montrer que les lignes de courant ne sont autres que les courbes isovaleurs de ψ. Représenter ensuite, sur une même figure, quelques lignes de courant et quelques équipotentielles. Quelles relations y a-t-il entre ces deux réseaux de courbes ?
6. Le potentiel complexe associé à l'écoulement est défini par $\phi = \varphi + i\psi$. Montrer qu'il s'agit d'une fonction complexe de la variable complexe $re^{i\theta}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{C}^\star$, dont on donnera l'expression.
7. Donner l'expression du champ des accélérations $\boldsymbol{\gamma}$ en variables d'Euler. Quelles sont les courbes enveloppes de ce champ. Montrer que $\mathbf{rot}_x\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0}$ puis donner l'expression du potentiel des accélérations. Représenter enfin, sur une même figure, quelques courbes enveloppes et quelques courbes d'égal potentiel des accélérations.