E.N.T.P.E
Département Mathématiques, Informatique et Physique

Cours de Mécanique des Milieux Continus (1ère année)
Devoir numéro 2
Durée 2 heures

Mercredi 9 Novembre 2011

Documents autorisés : *Aucun document n'est autorisé, à l'exception du formulaire au format A4 (annexe B du cours). Les calculatrices et autres dispositifs électroniques ne sont pas autorisés.*

Premier exercice : Étude d'un état de contrainte

Un massif de sol, occupant le demi-espace $x_1 \geq 0$, est entaillé d'une gouttière semi-cylindrique d'axe Ox_3 et de rayon R, ainsi que l'illustre la figure 1. Le comportement du massif est élastique linéaire isotrope, de module d'Young E et de coefficient de Poisson ν. Les actions mécaniques extérieures de contact s'exerçant sur la paroi de la gouttière engendrent alors, en tout point du massif, le champ de contrainte

$$\boldsymbol{\sigma} = -\frac{K}{r^4}\begin{bmatrix} x_1^3 & x_1^2 x_2 & 0 \\ x_1^2 x_2 & x_1 x_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \nu r^2 x_1 \end{bmatrix}$$

où $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ et où K est une constante strictement positive donnée de dimension MT^{-2}.

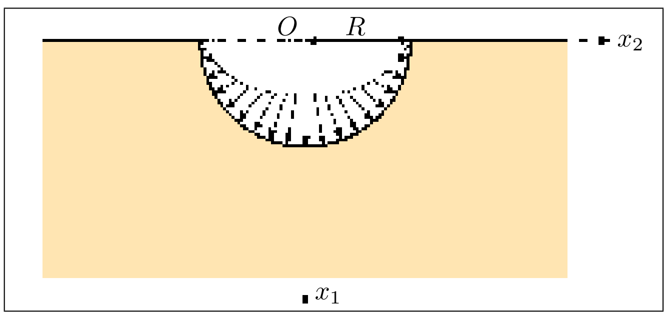

FIG. 1 – Massif de sol entaillé d'une gouttière

1. Montrer que l'équilibre du massif est possible sans actions mécaniques extérieures à distance.
2. Donner, en tout point du solide, l'expression du vecteur contrainte sur les facettes de normales $\vec{n}=\vec{e_3}$ puis $\vec{n}=\frac{1}{r}(x_1\,\vec{e_1}+x_2\,\vec{e_2})$. En déduire les contraintes principales et les directions principales de contrainte.
3. Donner, en tout point du solide et relativement au repère local $(\vec{e_r},\vec{e_\theta},\vec{e_z})$ associé au système de coordonnées cylindriques (r,θ,z) où l'axe Oz coïncide avec l'axe Ox_3, l'expression du tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ puis celle du tenseur linéarisé des petites déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$.
4. Déterminer la résultante $\vec{\mathcal{R}}$ des actions mécaniques extérieures de contact s'exerçant sur la paroi de la gouttière par unité de longueur dans la direction Ox_3.
5. Donner un exemple simple de situation physique où l'on observe, sur la paroi de la gouttière, un tel champ d'actions mécaniques extérieures de contact.

Deuxième exercice : Sollicitation thermomécanique d'une poutre

Une poutre de longueur L et de section droite rectangulaire, symétrique par rapport au plan (Ox_1, Ox_2), repose sur un bâti indéformable comme l'illustre la figure 2. L'extrémité gauche de la poutre est au contact du bâti tandis que son extrémité droite en est distante de δ, avec $\frac{\delta}{L} \ll 1$. Les déplacements de la poutre dans la direction Ox_3 perpendiculaire au plan (Ox_1, Ox_2) sont par ailleurs non empêchés. Cette poutre, constituée d'un matériau homogène au comportement thermoélastique linéaire isotrope de module d'Young E, de coefficient de Poisson $\nu = \frac{1}{3}$ et de coefficient de dilatation thermique linéaire β, est alors soumise, à partir de l'instant initial $t = 0$, à une augmentation de température $\Delta T = at$ où a est une constante strictement positive donnée de dimension $\theta \mathrm{T}^{-1}$.

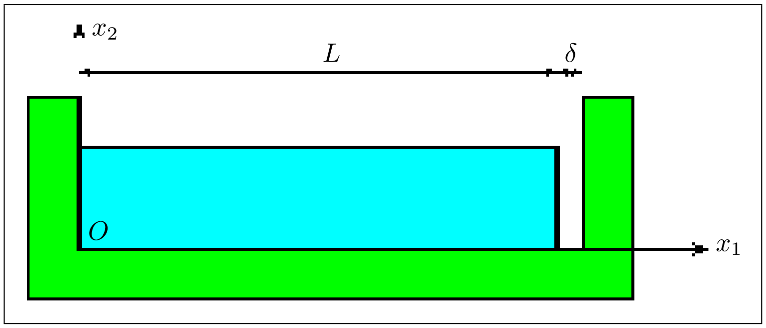

FIG. 2 – Sollicitation thermomécanique d'une poutre

Les actions mécaniques à distance étant ici négligées, l'on suppose qu'en l'absence de frottement entre la poutre et le bâti le champ des déplacements adopte la forme $\mathbf{u} = u_1(x_1,t)\overrightarrow{e_1} + u_2(x_2,t)\overrightarrow{e_2} + u_3(x_3,t)\overrightarrow{e_3}$. La poutre est par ailleurs à chaque instant en état de quasi équilibre, de sorte que les termes d'accélération sont négligeables. Enfin l'on désigne par t_1 l'instant où l'extrémité droite de la poutre entre en contact avec le bâti.

1. Justifier les conditions aux limites cinématiques $u_1(0,t) = 0$, $u_2(0,t) = 0$ et $u_3(0,t) = 0$, $\forall t \geq 0$,
2. Montrer, en tirant parti des équations indéfinies de l'équilibre, des résultats obtenus à la question 1 ainsi que des conditions aux limites en contrainte sur les parois latérales et supérieure de la poutre que l'on a, $\forall t \geq 0$, $u_1(x_1,t) = A(t)x_1$, $u_2(x_2,t) = B(t)x_2$ et $u_3(x_3,t) = B(t)x_3$ où A est une fonction à déterminer et où $B(t) = \frac{1}{3}(4\beta at - A(t))$ (On rappelle que si $\nu = \frac{1}{3}$ alors $\lambda = 2\mu = \frac{3E}{4}$).
3. On suppose $t \in [0, t_1[$. Donner l'expression de $A(t)$ en fonction de β, a et t. En déduire ensuite, en fonction cette fois de δ, a, β et L, celle de t_1.
4. On suppose à présent $t \geq t_1$. Quelle est alors l'expression de $A(t)$?
5. Étudier et représenter les variations en fonction du temps des composantes non nulles du tenseur linéarisé des petites déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$ et du tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$.

Troisième exercice : sphère soumise à son champ de gravitation propre

Une sphère de rayon R est constituée d'un matériau de masse volumique ρ ayant un comportement élastique linéaire isotrope, de module d'Young E et de coefficient de Poisson $\nu = 0$. Cette sphère est soumise, dans le repère local $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_\varphi})$ associé au système de coordonnées sphériques (r, θ, φ), au champ d'actions mécaniques extérieures à distance $\mathbf{b} = -g\frac{r}{R}\overrightarrow{e_r}$ où g désigne l'accélération de la pesanteur. Son centre est par ailleurs fixe et sa paroi extérieure n'est soumise à aucune action mécanique de contact. On suppose alors, compte tenu de toutes ces hypothèses, que le champ des déplacements adopte la forme $\mathbf{u} = u(r)\overrightarrow{e_r}$ où u est une fonction inconnue de la variable d'espace r que l'on se propose de déterminer.

1. Donner, en fonction de u et r, l'expression du tenseur linéarisé des petites déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$ puis en déduire, en fonction cette fois de u, r et E, celle du tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$.
2. Déduire, en tirant parti de la seule équation indéfinie de l'équilibre non trivialement satisfaite, que u est solution de l'équation différentielle ordinaire
$$u''(r) + 2\frac{u'(r)}{r} - 2\frac{u(r)}{r^2} = \frac{\rho g}{E}\frac{r}{R} \qquad r \in]0, R[\tag{1}$$
3. Montrer que l'équation différentielle ordinaire (1) admet une solution particulière $u^{(1)}(r)$ de la forme $u^{(1)}(r) = ar^3$ et donner, en fonction de ρ, g E et R, l'expression de la constante a. Chercher ensuite des solutions $u^{(0)}(r)$ de l'équation homogène associée sous la forme $u^{(0)}(r) = r^\alpha$, $\alpha \in \mathrm{IR}^\star$. En déduire alors, en fonction de ρ, g, E, R, r et de deux constantes d'intégration A et B, l'expression générale de $u(r)$.
4. De la condition aux limites cinématique en $r = 0$ déduire que l'une des constantes A et B est nulle puis donner, après avoir tiré parti des conditions aux limites en contrainte en $r = R$, l'expression de l'autre constante en fonction de ρ, g, E et R. En déduire enfin celle des composantes non nulles de $\mathbf{u}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ et $\boldsymbol{\sigma}$.