E.N.T.P.E
Département Mathématiques, Informatique et Physique

Cours de Mécanique des Milieux Continus (1ère année)
Devoir numéro 3
Durée 2 heures

mercredi 18 janvier 2012

Documents autorisés : *Aucun document n'est autorisé, à l'exception du formulaire au format A4 (annexe B du cours). Les calculatrices et autres dispositifs électroniques ne sont pas autorisés.*

Premier exercice : Poutre soumise à un champ axial d'actions mécaniques à distance

Une poutre de longueur l et de sections droites rectangulaires de mêmes dimensions et d'aire S (figure 1) est consituée d'un matériau homogène de masse volumique ρ au comportement élastique linéaire et isotrope, de module d'Young E et de coefficient de Poisson $\nu = 0$. La poutre, encastrée à son extrémité gauche $x = 0$ et libre à son extrémité droite $x = l$, est soumise à la densité massique d'actions mécaniques à distance $\mathbf{b} = ax^2\,\overrightarrow{e_x}$, où a est une constante strictement positive donnée de dimension $\mathrm{L}^{-1}\mathrm{T}^{-2}$. On suppose alors, compte tenu des hypothèses précédentes et de la géométrie du problème, que le champ des déplacements adopte la forme $\mathbf{u} = u(x)\,\overrightarrow{e_x}$, où $\overrightarrow{e_x}$ est le vecteur directeur unitaire de l'axe Ox et où u est une fonction de x que l'on se propose de déterminer.

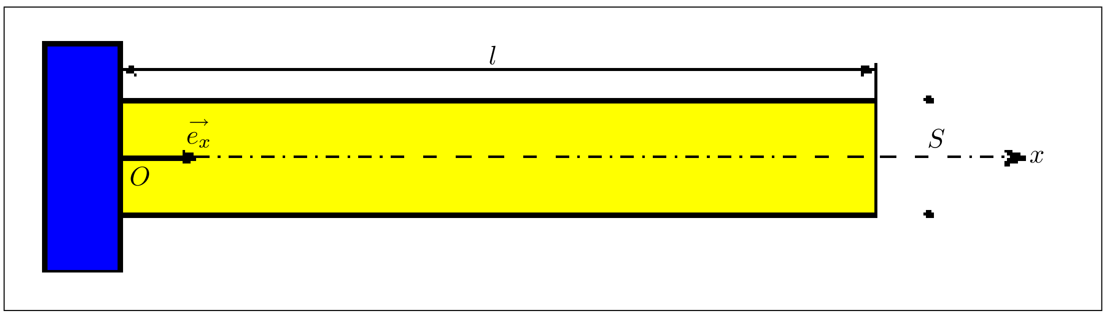

FIG. 1 – Poutre soumise à un champ axial d'actions mécaniques à distance

1. De l'équation indéfinie de l'équilibre en projection sur $\overrightarrow{e_x}$ et de la condition aux limites statique en $x = l$ déduire l'expression de la contrainte axiale σ_{xx} puis, en tirant cette fois parti de la condition aux limites cinématique en $x = 0$, celle du déplacement axial $u(x)$.

On se propose, dans ce qui suit, d'exhiber une solution (a priori approchée) grâce au théorème de l'énergie potentielle[1].

2. On pose $u(x) = \alpha x$. Donner l'expression de l'énergie potentielle $J(\alpha)$ et dire quelle valeur de α la minimise. Quel est alors le déplacement en $x = l$? (on comparera ce dernier avec la valeur exacte trouvée à la question 1). En quoi cette solution n'est pas satisfaisante ?
3. On pose à présent $u(x) = \alpha x + \beta x^4$. Calculer $J(\alpha, \beta)$ et montrer que l'on obtient alors la solution trouvée à la question 1.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$. Dire, sans faire de calculs mais en le justifiant, ce que l'on obtiendrait en posant $u(x) = \sum_{k=1}^{k=n} \alpha_k x^k$.

Deuxième exercice : Écoulement dans une conduite cylindrique

Une conduite cylindrique de révolution est, à gauche d'une section (S_1), divisée par un plan passant par son axe Oz, ainsi que l'illustre la figure 2. L'une des moitiés est alimentée par de l'eau animée d'une vitesse v_1, l'autre par de l'eau animée de la vitesse $\frac{1}{2}v_1$. À droite de (S_1), après une zone perturbée, l'écoulement est redevenu uniforme dans une section (S_2). L'eau est supposée incompressible et l'on néglige le frottement entre celle-ci et la conduite ainsi que les actions mécaniques à distance. On admet enfin que dans chacune des sections (S_1) et (S_2) la pression est constante.

[1] L'énergie potentielle d'un solide dans un champ de déplacement virtuel est égale à la différence entre son énergie de déformation élastique et le travail, dans ce champ, des actions mécaniques extérieures.

1. Justifier pourquoi le théorème de Bernoulli ne peut être appliqué.
2. Calculer, en fonction de v_1, la vitesse v_2 dans la section (S_2).
3. En appliquant le théorème d'Euler[2] déterminer, en fonction de v_1 et de la masse volumique ρ de l'eau, la différence de pression $p_2 - p_1$.

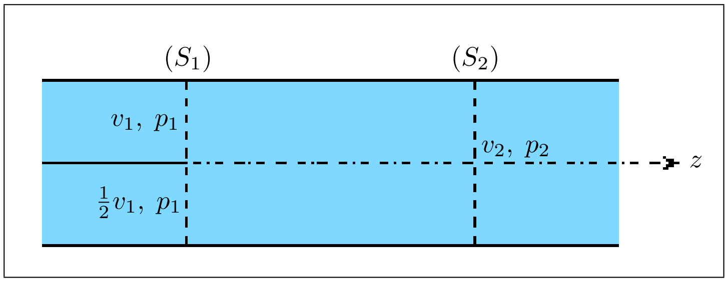

FIG. 2 – Écoulement dans une conduite cylindrique

Troisième exercice : Écoulements d'un fluide visqueux newtonien

On considère des écoulement d'un fluide visqex newtonien, de masse volumique ρ et de viscosité dynamique de cisaillement η, caractérisés, relativement au système de coordonnées cartésiennes (x_1, x_2, x_3) , par le champ eulérien des vitesses

$$\left\{\begin{array}{lcl} v_1 & = & -\dfrac{x_2}{r}h(r) \\ v_2 & = & \dfrac{x_1}{r}h(r) \\ v_3 & = & k(r) \end{array}\right.$$

où $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ et où $r \mapsto h(r)$ et $r \mapsto k(r)$ sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ de la variable r.

1. Montrer que dans le repère local $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$ associé au système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) où l'axe Oz coïncide avec l'axe Ox_3 (dans toute la suite on utilise ce système de coordonnées) le champ des vitesses a pour expression $\mathbf{v} = h(r)\overrightarrow{e_\theta} + k(r)\overrightarrow{e_z}$.
2. Montrer que l'écoulement s'effectue à volume constant.
3. Donner l'expression du champ des accélérations.
4. L'axe Ox_3 étant vertical ascendant et les actions mécaniques à distance étant réduites aux forces gravifiques, montrer qu'il existe des tels écoulements en donnant l'expression de la pression p au sein du fluide, cette dernière étant supposée indépendante de θ (justifier). On exprimera p en fonction de ρ, r, z, de l'accélération de la pesanteur g et de trois constantes arbitraires.

Quatrième exercice : Critère de limite élastique de Stassi d'Alia

Le critère de limite élastique de Stassi d'Alia a pour expression

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 + C_1(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) + C_2 = 0$$

où σ_1, σ_2 et σ_3 désignent les contraintes principales et où C_1 et C_2 sont deux constantes mécaniques caractéristiques du matériau. On désigne enfin respectivement par σ_1^{c} et σ_1^{t} les limites élastiques en compression et en traction simple.

1. Exprimer le critère de limite élastique de Stassi d'Alia en fonction des invariants scalaires $I_1 = \sigma_m$ et $J_2 = \operatorname{tr} \mathbf{s}^2$ du tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ puis en déduire la nature géométrique de la surface limite dans l'espace $(0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ des contraintes principales.
2. Donner, en fonction de σ_1^{c} et σ_1^{t}, l'expression des constantes mécaniques C_1et C_2.
3. Montrer que pour des états de déformation plane $(\varepsilon_3 = 0)$ et lorsque $\nu = \frac{1}{2}$ le critère de limite élastique de Stassi d'Alia a pour expression $3(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + 3C_1(\sigma_1 + \sigma_2) + 2C_2 = 0$
4. **Question bonus (difficile)** Les hypothèses de la question 3 étant satisfaites, donner l'expression de la courbe limite dans le plan du tricercle de Mohr d'abscisse σ_{nn} (contrainte normale) et d'ordonnée τ_n (contrainte de cisaillement), en fonction de σ_{nn}, τ_n, C_1 et C_2. Quelle est la nature géométrique de cette courbe ?

---

[2] La résultante des actions mécaniques extérieures s'exerçant sur un volume matériel est égale à la somme de la résultante de la dérivée partielle par rapport au temps de ses quantités de mouvement et du débit, à travers sa frontière, de ces mêmes quantités de mouvement.