$x_* = 1$

PREMIER TEST D'ANALYSE NUMERIQUE 25 AVRIL 2002

EXERCICE 1 (barème : 7)

Dans le plan réel muni d'un repère orthonormé xOy on considère les 6 points : $A(0;3/2)$, $B(3/2;0)$, $C(3;0)$, $D(0;3)$, $E(-3;0)$ et $F(-3/2;0)$. On note Ω l'intérieur du polygone ABCDEF et $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ sa frontière, avec $\Gamma_1 = [AB] \cup [CD] \cup [DE] \cup [FA]$ et $\Gamma_2 =]EF[\cup]BC[$.

Considérons alors le problème suivant :

$$\begin{aligned} -\Delta u(x,y) &= y \quad \text{dans} \quad \Omega \\ u(x,y) &= x \quad \text{sur} \quad \Gamma_1 \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x,y) &= u(x,y) \quad \text{sur} \quad \Gamma_2 \end{aligned}$$

Discrétiser le problème par différences finies, en prenant un pas constant $h = 1/2$ dans les deux directions du plan, et en utilisant une méthode d'ordre 2 pour prendre en compte la condition aux limites sur Γ_2. On donnera la matrice et le second membre du système linéaire obtenu en adoptant une numérotation des points du maillage par ligne de gauche à droite et de haut en bas.

Attention : Tous les élément non nuls de la matrice et du second membre devront être écrits, sinon ils seront considérés comme FAUX

$f(P) = y(P)$

EXERCICE 2 (barème : 1+2+1+2+3+2)

Soit N un entier naturel strictement positif. On désire résoudre par une méthode itérative un système linéaire de matrice carrée A d'ordre $N+2$ dont les seuls éléments non nuls sont : $A_{i,i} = A_{1,2} = A_{N+2,N+1} = -2$ pour $i = 1, \ldots, N+2$ et $A_{i,i-1} = A_{i,i+1} = 1$ pour $i = 2, \ldots, N+1$

1) Calculer la matrice $J(A, N)$ de la méthode itérative de Jacobi.

2) pour $N = 1$ et $N = 2$ la méthode de Jacobi converge-t-elle?

3) Calculer la matrice $L_\omega(A, 1)$ de la méthode itérative S.O.R.

4) Calculer (en le factorisant) le polynôme caractéristique de $L_\omega(A, 1)$ et montrer qu'il admet la racine réelle $1 - \omega$

5) Etudier la convergence de la méthode S.O.R pour $N = 1$ en fonction du paramètre ω.

6) Donner un exemple de problème aux limites dont la discrétisation conduit à un système linéaire de matrice A définie au début de l'exercice. **Cette question est indépendante des questions précédentes.**

EXERCICE 3 (barème : 1+2)

Soit p un entier naturel strictement positif. On veut résoudre numériquement l'équation $f(x) = 0$ en utilisant la méthode itérative définie par x_0 et $x_{n+1} = G(x_n)$ avec :

$$G(x) = x - \frac{f(x)(f'(x))^{p-1}}{1 + (f'(x))^p}$$

1) Pour quelles valeurs de p est-on certain que la méthode converge au voisinage d'un point fixe?

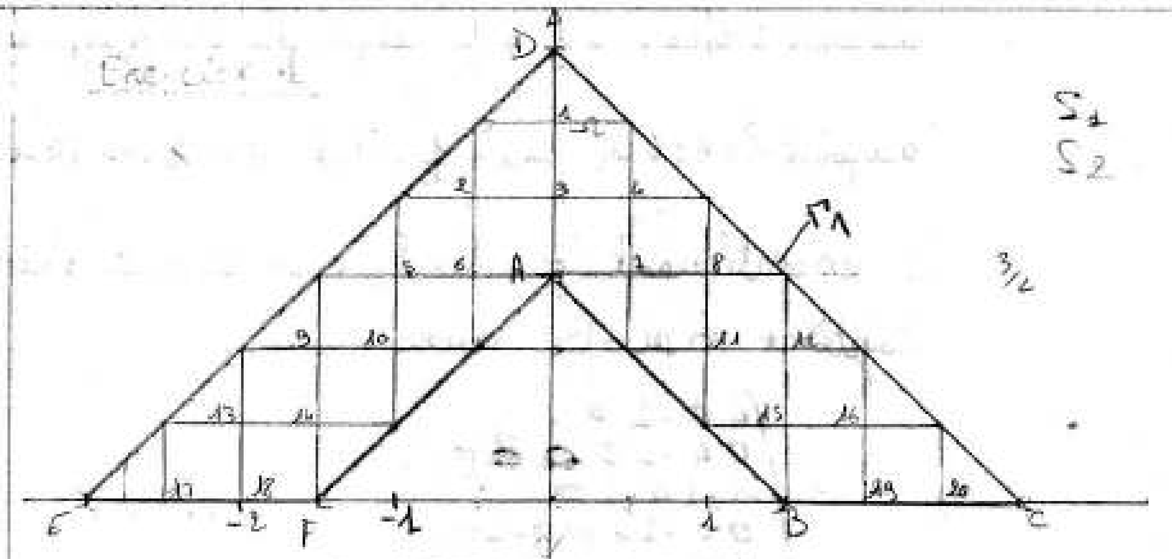
2) Calculer avec 6 décimales les valeurs $x_1, \ldots, x_5$, obtenues en appliquant cette méthode à la fonction $f(x) = x^3 - 2$ avec $p = 2$ et $x_0 = 1$ ou bien $x_0 = 2$. Conclusion?

RENAUD Jackie
1AG2

Jeudi 25 avril 2002

Exercice 1 : 7/7
Exercice 2 : 3,5/11
Exercice 3 : 2/3

12,5/20

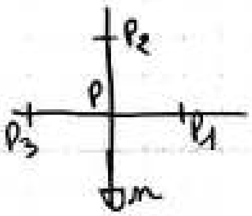


$$\begin{cases} -\Delta u(x,y) = y & \text{dans } \Omega \\ u(x,y) = x & \text{sur } \Sigma_1. \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}(x,y) = u(x,y) & \text{sur } \Sigma_2. \end{cases}$$

$h = \frac{1}{2}$.

dans Ω, on a : $\dfrac{4u(P) - u(P_1) - u(P_2) - u(P_3) - u(P_4)}{h^2} = f(P)$.

Etude pour S_2.



$\exists P_2^* / \varphi(P_2) = \varphi(P) - h\frac{\partial\varphi}{\partial y}(P) + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}(P) - \frac{h^3}{3!}\frac{\partial^3\varphi}{\partial y^3}(P_2^*)$

or $\frac{\partial\varphi}{\partial y}(P) = \varphi(x,y)$.

d'où $\varphi(P_2) = \varphi(P)\,[1-h] + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}(P) - \frac{h^3}{3!}\frac{\partial^3\varphi}{\partial y^3}(P_2^*)$.

$\Rightarrow \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}(P) = \frac{2}{h^2}\left[-\varphi(P)(1-h) + \varphi(P_2)\right] + \frac{h}{3}\frac{\partial^3\varphi}{\partial y^3}(P_2^*)$.

d'où : $+\frac{u(P_1)+u(P_3)-2u(P)}{h^2} + \frac{2}{h^2}\left[(h-1)u(P) + u(P_2)\right] = -f(P)$.

d'où : $u(P)(-4+2h) + u(P_1) + u(P_3) + 2u(P_2) = -h^2 f(P)$ sur S_2.

On peut donc en déduire la matrice :

au point 1 : $4(u_1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - u_3) = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 4u_1 - u_3 = \frac{5}{8}$.

au point 2 : $4(4u_2 - u_3 + \frac{1}{2} - u_6 + 1) = 2 \Leftrightarrow (4u_2 - u_3 - u_6) = -1$

en continuant les calculs, on en déduit l'écriture du système $Au = B$ avec

$$A = \begin{pmatrix}
4\ 0\ -1\ 0 \\
0\ 4\ -1\ 0\ 0\ 0\ 0 \\
-1\ -1\ 4\ -1\ 0 \\
0\ 0\ -1\ 4\ 0\ 0\ -1\ 0 \\
0\ 0\ 0\ 0\ 4\ -1\ 0\ 0\ 0\ 0\ -1\ 0 \\
0\ -1\ 0\ 0\ -1\ 4\ 0 \\
0\ 0\ -1\ 0\ 0\ 0\ 4\ -1\ 0 \\
0\ \text{---}\ 0\ 0\ -1\ 4\ 0\ 0\ -1 \\
0\ 4\ -1\ 0\ 0\ 0\ -1\ 0 \\
-1\ 0\ 0\ 0\ -1\ 4\ 0 \\
-1\ 0\ 0\ 4\ -1\ 0 \\
-1\ 4\ 0\ 0\ 0\ -1 \\
4\ -1\ 0\ 0\ 0\ -1 \\
-1\ 0\ 0\ 0\ 0\ -1\ 4 \\
-1\ 0\ 0\ 4\ -1 \\
-1\ 4\ 0\ 0\ 0\ -1 \\
-1\ 3 \\
-2\ 0\ 0\ 0\ -1\ 3 \\
-2\ 0\ 0\ 3\ -1 \\
-1\ 3
\end{pmatrix}$$

(4)

5/5

au point 3 : $4(4u_3 - u_1 - u_2 - u_4) = 2$

au point 4 : $4(4u_4 - 1 - \frac{1}{2} - u_3 - u_7) = 2 \Leftrightarrow 4u_4 - u_3 - u_7 = 2.$

au point 5 : $4(4u_5 - u_6 - u_{10} + 1 + \frac{3}{2}) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 4u_5 - u_6 - u_{10} = -\frac{17}{8}.$

au point 6 : $4(4u_6 - u_2 - u_5 + \frac{1}{2}) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 4u_6 - u_2 - u_5 = -\frac{1}{8}.$

au point 7 : $4(4u_7 - u_8 - u_4 - \frac{1}{2}) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 4u_7 - u_8 - u_4 = \frac{7}{8}.$

— 8 : $4(4u_8 - u_{11} - u_7 - \frac{3}{2} - 1) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 4u_8 - u_{11} - u_7 = \frac{23}{8}.$

— 9 : $4(4u_9 - u_{10} - u_{14} + \frac{3}{2} + 2) = 1 \Leftrightarrow 4u_9 - u_{10} - u_{14} = -\frac{13}{4}.$

— 10 : $4(4u_{10} - u_5 - u_9 + \frac{1}{2} + 1) = 1 \Leftrightarrow 4u_{10} - u_5 - u_9 = -\frac{5}{4}.$

— 11 : $4(4u_{11} - u_{12} - u_8 - \frac{1}{2} - 1) = 1 \Leftrightarrow 4u_{11} - u_{12} - u_8 = \frac{7}{4}.$

— 12 : $4(4u_{12} - u_{11} - u_{15} - 2 - \frac{3}{2}) = 1 \Leftrightarrow 4u_{12} - u_{11} - u_{15} = \frac{15}{4}.$

— 13 : $4(4u_{13} - u_{14} - u_{18} + 2 + \frac{5}{2}) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4u_{13} - u_{14} - u_{18} = -\frac{35}{8}.$

— 14 : $4(4u_{14} - u_9 - u_{13} + 1 + \frac{3}{2}) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4u_{14} - u_9 - u_{13} = -\frac{19}{8}.$

— 15 : $4(4u_{15} - u_{16} - u_{12} - 1 - \frac{3}{2}) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4u_{15} - u_{16} - u_{12} = \frac{21}{8}.$

— 16 : $4(4u_{16} - u_{15} - u_{19} - \frac{5}{2} - 2) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4u_{16} - u_{15} - u_{19} = \frac{37}{8}.$

— 17 : $+3u_{17} - u_{18} + 3 + 5) = 0 \Leftrightarrow 3u_{17} - u_{18} = -8.$

— 18 : $(3u_{18} - u_{17} - 2u_{13} + \frac{3}{2}) = 0 \Leftrightarrow 3u_{18} - u_{17} - 2u_{13} = -\frac{3}{2}.$

— 19 : $(3u_{19} - u_{20} - 2u_{16} - \frac{3}{2}) = 0 \Leftrightarrow 3u_{19} - u_{20} - 2u_{16} = \frac{3}{2}.$

— 20 : $(3u_{20} - u_{19} - 5 - 3) = 0 \Leftrightarrow 3u_{20} - u_{19} = 8.$

et $B = \begin{pmatrix} \frac{5}{8} \\ -1 \\ \frac{1}{2} \\ 2 \\ -\frac{17}{8} \\ -\frac{1}{8} \\ \frac{7}{8} \\ \frac{23}{8} \\ -\frac{13}{4} \\ -\frac{5}{4} \\ \frac{7}{4} \\ \frac{15}{4} \\ -\frac{35}{8} \\ -\frac{19}{8} \end{pmatrix}$

suite à partir point 15 :

$\begin{pmatrix} \frac{21}{8} \\ \frac{37}{8} \\ -8 \\ -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 8 \end{pmatrix}$

Exercice 2

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & & & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

1°) $A = D - E - F$ avec $D = \begin{pmatrix} -2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -2 \end{pmatrix}$.

$$E = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ -1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}.$$

et $J(A,N) = D^{-1}(E+F)$.

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad E+F = \begin{pmatrix} 0 & 2 & & 0 \\ 1 & \ddots & -1 & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

d'où $J(A,N) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & & 0 \\ \frac{1}{2} & \ddots & \frac{1}{2} & \\ & \ddots & \ddots & \frac{1}{2} \\ 0 & & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

id est : $\forall i,\ j_{i,i} = 0$. $j_{1,2} = j_{N+2,N+1} = -1$.

$j_{i,i-1} = j_{i,i+1} = \frac{1}{2}\quad \forall i = 2 \dots N+1$.

2°) $N = 1$:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & +1 \\ 0 & +2 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La méthode de Jacobi converge si $\rho(J) < 1$.

$$\det(J - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\lambda & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix}.$$

$$= \begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\lambda - \lambda\left(\lambda^2 + \frac{1}{2}\right).$$

RENAUD Jackie Feuille 2

$\rightarrow \det(J-\lambda I) = \lambda(-\lambda^2-1) = \lambda(\lambda^2+1)$

d'où les valeurs propres de J sont : $0, \pm i$.

d'où $\rho(J) = \operatorname{Max}|\lambda_i| = 1$. 1

$\Rightarrow$ la méthode de Jacobi ne converge pas pour $N=1$.

• <u>$N=2$</u> :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ +\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\det(J-\lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\lambda & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\lambda & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\lambda & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} \mp \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\lambda & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix}.$$

$$= -\lambda\left[-\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} - \frac{1}{2} \begin{vmatrix} +\frac{1}{2} & 0 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix}\right] \mp \frac{1}{2}\left[-\begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix}\right]$$

$\frac{1}{2}$ $$= \lambda^2\left(\lambda^2+\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\lambda\left(-\frac{\lambda}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\lambda^2+\frac{1}{2}\right).$$

$$= \left(\lambda^2+\frac{1}{2}\right)\left(\lambda^2-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4}\lambda^2.$$

$$\cancel{= \lambda^4 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\lambda^2.}$$

d'où les valeurs propres de J sont :

$\lambda_1 = 0,8002$; $\lambda_2 = 0,6248i$; $\lambda_3 = -0,6248i$; $\lambda_4 = -0,8$

d'où $\rho(J) = 0,8002 < 1$.

$\Rightarrow$ la méthode de Jacobi converge pour <u>$N=2$</u>.

3°) $\underline{N=1}$

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}.$$

avec les mêmes notations que précédemment, on a :

$$\mathcal{L}_\omega(A,1)=\left(\frac{D}{\omega}-E\right)^{-1}\left(\frac{1-\omega}{\omega}D+F\right).$$

$$\frac{D}{\omega}-E=\begin{pmatrix}-\frac{2}{\omega} & 0 & 0\\ 0 & -\frac{2}{\omega} & 0\\ 0 & -1 & -\frac{2}{\omega}\end{pmatrix}$$

$$\frac{1-\omega}{\omega}D+F=\begin{pmatrix}\frac{1-\omega}{\omega}(-2) & 0 & 0\\ 0 & -\frac{2(1-\omega)}{\omega} & -1\\ 0 & 0 & -\frac{2(1-\omega)}{\omega}\end{pmatrix}$$

Pour inverser la matrice $\frac{D}{\omega}-E$, on fait par identification, car on sait que son inverse est aussi une triangulaire inférieure :

$$\left(\frac{D}{\omega}-E\right)^{-1}=\begin{pmatrix}a & 0 & 0\\ b & c & 0\\ d & e & f\end{pmatrix}.$$

$$\left(\frac{D}{\omega}-E\right)\left(\frac{D}{\omega}-E\right)^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{\omega}a & 0 & 0\\ -\frac{2}{\omega}b & -\frac{2c}{\omega} & 0\\ -b-\frac{2}{\omega}d & -c-\frac{2}{\omega}e & -\frac{2f}{\omega}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

d'où $\begin{cases}a=-\frac{\omega}{2}=c=f.\\ b=0=d\\ e=-\frac{2}{\omega}c.\end{cases}$

d'où $\left(\frac{D}{\omega}-E\right)^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{\omega}{2} & 0 & 0\\ 0 & -\frac{\omega}{2} & 0\\ 0 & 1 & -\frac{\omega}{2}\end{pmatrix}$

$\frac{1}{2}$

d'où $\mathcal{L}_\omega(A,1)=\begin{pmatrix}-\frac{\omega}{2} & 0 & 0\\ 0 & -\frac{\omega}{2} & 0\\ 0 & 1 & -\frac{\omega}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\frac{(1-\omega)}{\omega} & 0 & 0\\ 0 & -\frac{2(1-\omega)}{\omega} & -1\\ 0 & 0 & -\frac{2(1-\omega)}{\omega}\end{pmatrix}.$

$$=\begin{pmatrix}1-\omega & 0 & 0\\ 0 & 1-\omega & -\frac{\omega}{2}\\ 0 & -\frac{2(1-\omega)}{\omega} & 1-\omega\end{pmatrix}.$$

$P(\mathcal{L}_\omega) = \det(\mathcal{L}_\omega - \lambda I)$.

$$= \begin{vmatrix} 1-\omega-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\omega-\lambda & -\frac{\omega}{2} \\ 0 & -\frac{2(1-\omega)}{\omega} & 1-\omega-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\omega-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\omega-\lambda & -\frac{\omega}{2} \\ -\frac{2(1-\omega)}{\omega} & 1-\omega-\lambda \end{vmatrix}$$

1/2

$$= (1-\omega-\lambda)\left[(1-\omega-\lambda)^2 - (1-\omega)\right].$$

$\cancel{[(1-\omega-\lambda)(\omega-\lambda) - 1-\omega]} = (1-\omega-\lambda)\,(\omega-\lambda-\omega^2-\lambda\omega-\lambda\omega+1+\omega)$
$= (1-\omega-\lambda)\,(2\omega-\omega^2-2\lambda\omega-\lambda+1)$

$P(\mathcal{L}_\omega) = 0 \iff 1-\omega-\lambda = 0.$
$(1-\omega-\lambda)^2 - (1-\omega) = 0.$

d'où $\lambda = 1-\omega$ est une solution réelle de $P(\mathcal{L}_\omega) = 0$.

5) Le critère de convergence est : $\rho(\mathcal{L}) < 1$.

$\rho(\mathcal{L}_\omega) = \max_i |\lambda_i|$.

dans notre cas, les valeurs propres sont : $\lambda_1 = 1-\omega$
et les solutions de $(1-\omega-\lambda)^2 - (1-\omega) = 0$.

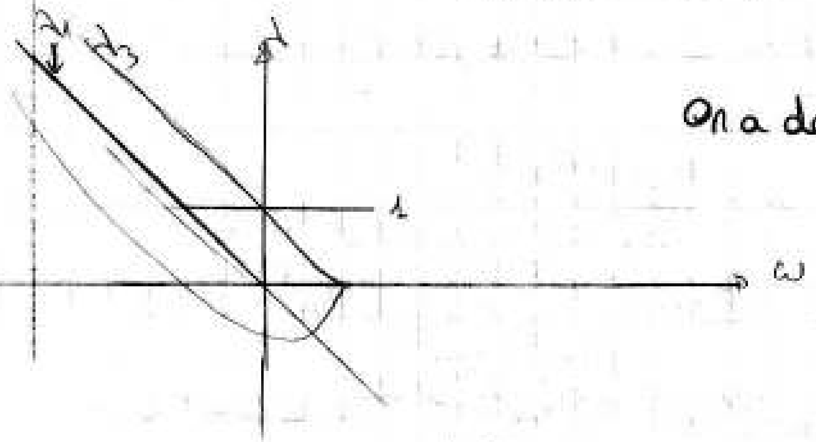
$\Rightarrow (1-\omega-\lambda)^2 = 1-\omega.$

$\Rightarrow \omega < 1.$

$\Rightarrow 1-\omega-\lambda = \pm\sqrt{1-\omega}.$

$\lambda_2 = 1-\omega-\sqrt{1-\omega}.$

$\lambda_3 = 1-\omega+\sqrt{1-\omega}.$



On a donc : $\max_i |\lambda_i| = |\lambda_3|$.

$\lambda_3 = 1 - \omega + \sqrt{\omega - 1}$.

$|\lambda_3| = |1 - \omega + \sqrt{\omega - 1}|$.

$$-1 < 1 - \omega + \sqrt{\omega - 1} < 1.$$

6) <u>Exemple</u> : un système du type : $-u''(x) = f(x)$.
$u(0) = \alpha$ et $u(1) = \beta$.

conduit à une matrice tridiagonale. De bonnes valeurs sont à chercher pour n'avoir que des -2 et des 1.

Exercice 3

$$G(x) = x - \frac{f(x)(f'(x))^{p-1}}{1 + (f'(x))^p}.$$

2) $f(x) = x^3 - 2$. $\quad p = 2$ et $x_0 = 1$.

$x_0 = 1$.

$x_1 = 1,187500$

2 $\quad x_2 = 1,237824$

$x_3 = 1,252998$

$x_4 = 1,257734$

$x_5 = 1,259229$.

1) On a : $x^*_{n+1} = G(x_n)$.

Pour avoir convergence, on doit avoir

$\rho(\varphi'(x^*)) < 1$.

or $\varphi^*(x) = x - \dfrac{f(x)(f'(x))^{p-1}}{1 + (f'(x))^p + f(x)(f''(x))^{p-2}(p-1)}$

$\Rightarrow \varphi'(x) = 1 - \dfrac{(f'(x) f'(x)^{p-1})(1 + f'(x))^p - f(x)(f'(x))^{p-1} p \, f''(x) (1+f'(x))^{p-1}}{(1 + f'(x))^{2p}}$

$= \cancel{1 - (f'(x))^p + f(x)(f''(x))^{p-2}(p-1)(1 + f'(x))^p}$

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{\left((f'(x))^p + (p-1) f(x) f''(x) (f'(x))^{p-2}\right)(1+f'(x))^p - p f''(x) f(x) f'}{(1+f'(x))^{p+1}}$$

$$= 1 - \frac{(f'(x))^p + (p-1) f(x) f''(x) (f'(x))^{p-2} + \cancel{(f'(x))^{p+1}} + (p-1) f(x) f''(x) (f'(x))^{p-1}}{(1+f'(x))^{p+1}}$$

$$+ \frac{p f''(x) f(x) (f'(x))^{p-1}}{(1+f'(x))^{p+1}}$$

$$= 1 - \frac{(f'(x))^p + (p-1) f(x) f''(x) (f'(x))^{p-2} + f(x) f''(x) (f'(x))^{p-1}}{(1+f'(x))^{p+1}}$$

$f(x^*) = 0$ par définition

$$\Rightarrow \quad \varphi'(x^*) = 1 - \frac{f'(x^*)^p}{\{1 + f'(x^*)\}^p}$$