

—Trinôme 1
LE LUYER Jean
PERRET Olivier
TRAN Binh-Duc



TP 5 - Etude des modes de vibration d'une structure à étages



PARTIE 1 : CONCEPTS CLEFS DU T.P.

1.4 Amortissement et acuité de résonance

Question 1.1 :

Les phénomènes physiques à l'origine du caractère fini du déplacement de la masse lors de sa résonance sont le frottement, comme par exemple l'air, l'imperfection des liaisons et la déformation des éléments.

PARTIE 2 : APPROCHE EXPERIMENTALE DES MODES DE LA MAQUETTE

1.1 La structure étudiée

Question 2.1 :

La structure est métallique, elle est faite de deux éléments : des baguettes de faible épaisseur (largeur 10mm, épaisseur 1mm) et de plaque carré (de 100mm de côté, épaisseur 4-8mm).

Les baguettes ont été soudées de façon à créer le châssis de la structure. Il s'agit d'une structure parallélépipédique verticale, formé par 4 étages, les plaques simulant les sols des étages et les baguettes les poutres d'un immeuble.

Question 2.2 :

Les poutres sont susceptibles de se déformer selon l'axe des x car les poutres sont beaucoup moins épaisses que large ; de plus elles sont élancées ($h=115\text{mm}$)

Les plaques ne se déformeront pas ou très peu car elles sont bien plus massives vis-à-vis des poutres mais elles se déplaceront selon l'axe x pour suivre la déformation des poutres.

Question 2.3:

La maquette a été enveloppée de ruban adhésif afin d'augmenter l'amortissement et éviter ainsi la mise en plasticité de la structure.

Question 2.4:

La maquette est relié avec des vis de serrage qui constitue la liaison encastrement, chose qui n'est pas idéal car la vibration que subie la structure entraîne un desserrement des vis.

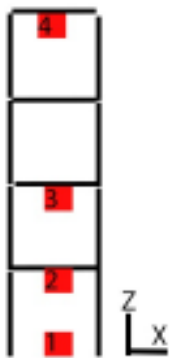
1.2 La chaîne de sollicitation

Question 2.5:

Le vérin a été installé dans le sens de l'axe x. Cela permettra de constater plus facilement les déplacements et les déformations.

1.3 La chaîne d'acquisition

Question 2.6:



3 capteurs sont installés sur la structure ainsi qu'un quatrième au sol. Malheureusement ces capteurs ne permettent d'observer le déplacement que selon l'axe des x. Hors il s'agit d'une étude d'une structure 3D, le système de capteur est donc insuffisant pour caractériser le comportement dynamique. Des capteurs supplémentaires pour caractériser les mouvements selon z, y et les mouvements de rotations seraient nécessaires pour une étude approfondie.

Question 2.7:

Les capteurs sont collés sur les plateaux modélisant les étages. Cette liaison est discutable, mieux qu'un système de fixation par vis, car moins sensible aux vibrations, la colle n'est pas toujours répartie de façon égale et peut se fragiliser dans le temps. De plus ces capteurs sont reliés à des fils pour l'acquisition de données ce qui peut nuire aux déplacements de la structure.

3.1 Sollicitation par bruit blanc

Question 2.8:

Le bruit blanc appliqué est approximativement à la même amplitude de sollicitation pour chaque fréquence : les faibles variations observées ne permettent pas de dire que les réponses différentes sont liées à la sollicitation mais bien à la structure. Ainsi, les fonctions de transfert dynamiques obtenues font apparaître 4 pics d'amplitude pour les fréquences correspondant aux différents modes de vibrations de la structure : environ 4,5 Hz, 15Hz, 22Hz, 30Hz.

La détermination des déphasages, des maxima à la résonance et de l'amortissement par simple lecture graphique ne semble pas satisfaisante car le nombre de points est trop faible par exemple pour savoir si le sommet est le bon. Nous pouvons déduire les mêmes choses pour le déphasage et l'amortissement.

Question 2.9:

La durée du bruit blanc imposé est de 15 minutes et en théorie le niveau d'accélération de la table est constant. Cependant les courbes représentant le niveau d'accélération de la table n'est pas constant sur l'ensemble des fréquences. On peut tout de même penser que l'hypothèse d'un bruit blanc peut être conservée car il y a une longue période de mesures et donc de nombreux points, cependant cela ne nous permettra de déterminer que les fréquences de résonance qui seront bien intrinsèques au système et non les réelles amplitudes et déphasage pour les modes.

3.2 Sollicitation par chocs

Question 2.10:

Nous avons réalisé les chocs de l'étage 1 à l'étage 4 en montant (choc 1 = étage 1...). Les transformées de Fourier montrent également 4 pics pour les mêmes fréquences cependant ils n'apparaissent pas de manière identiques pour tous les chocs. Ici nous ne comparerons les amplitudes que pour un même choc : les sollicitations ont été différentes pour les 4 chocs car réalisés par des personnes différentes. On voit que lorsqu'on sollicite l'étage 1, tous les modes sont sollicités de manière identique en revanche pour lorsqu'on sollicite l'étage 2 seulement 3 modes sont sollicités. Pour l'étage 3, les 4 modes sont sollicités seulement les modes 3 et 4 sont privilégiés par rapport aux 2 premiers modes. Enfin la sollicitation pour l'étage 4 fait apparaître 4 pics de faible amplitude.

Ici on voit donc bien que les résultats ne sont pas intrinsèques au système étudié car suivant la sollicitation que l'on applique, la combinaison des modes sollicités sera différente. Les résultats sont donc liés à la sollicitation.

3.4 Sollicitation harmonique stoppée

Question 2.12:

Etage	Mode 1				Etage	Mode 2			
	$f_1(\text{Hz})$	$ F_{rf} $	$\arg F_{rf}$	$\xi(\%)$		$f_2(\text{Hz})$	$ F_{rf} $	$\arg F_{rf}$	$\xi(\%)$
4	4,5	92	$\pi/2$	0,58	4	14,82	28	$-\pi/2$	0,4
2	4,5	59	$\pi/2$	0,57	2	14,82	40	$\pi/2$	0,46
1	4,5	31	$\pi/2$	0,58	1	14,82	37	$\pi/2$	0,46
Etage	Mode 3				Etage	Mode 4			
	$f_3(\text{Hz})$	$ F_{rf} $	$\arg F_{rf}$	$\xi(\%)$		$f_4(\text{Hz})$	$ F_{rf} $	$\arg F_{rf}$	$\xi(\%)$
4	22,7	6,7	$\pi/2$	0,58	4	30,4	0,89	$-\pi/3$	-
2	22,7	0,31	$-\pi$	0,57	2	30,44	8,7	$-\pi/3$	0,4
1	22,7	14	$\pi/2$	0,58	1	30,45	6,7	$\pi/2$	0,43

Sur la figure 2.1, nous avons relevé les valeurs de déphasage de l'amplitude de $|X/X_b|$ et de $\Delta\omega$. Nous obtenons alors :

- Etage 1 : $|Fr_f|=36,3$; $\Delta\omega = 0,22$; $\varphi = \pi/2$
- Etage 2 : $|Fr_f|=40$; $\Delta\omega = 0,24$; $\varphi = \pi/2$
- Etage 4 : $|Fr_f|=29$; $\Delta\omega = 0,16$; $\varphi = -\pi/2$

Ces valeurs correspondent à celles trouvées pour le mode 2.

D'après la figure 2.2, on peut remarquer que les deux premiers étages sont en phase et en opposition de phase avec le 4^{ème} étage. Ainsi on peut conclure que nous sommes en mode 2 : ce qui est confirmé sur la figure 2.4 pour les déformées : on voit effectivement les étages 1 et 2 en phase et l'étage 4 en opposition de phase avec les 2 autres.

Nous avons pu relever les valeurs d'accélération maximale et de fréquence

- 1^{er} étage : $a_1/g = 0,24 \rightarrow a_1=2,352 \text{ m/s}^2$ et $f_1=14,4$
- 2^{ème} étage : $a_2/g = 0,24 \rightarrow a_2=2,646 \text{ m/s}^2$ et $f_2=14,545$
- 4^{ème} étage : $a_4/g = 0,24 \rightarrow a_4=2,058 \text{ m/s}^2$ et $f_4=14,285$
- Base : $a_b/g = 0,24 \rightarrow a_b=2,058 \text{ m/s}^2$ et $f_b=14,545$

Il n'y a à priori pas de problème de linéarité. Par rapport au déphasage comme on vient de la dire, les étages 1 et 2 sont en phase et en opposition de phase avec l'étage 4 et avec la base. (Ces deux derniers sont donc en phase.

Question 2.13:

Par la méthode du décrétement logarithmique et de la coda, nous trouvons les valeurs suivantes grâce à la figure 2.3 :

	Décrétement logarithmique	coda
Etage 4	$4,96 \cdot 10^{-3}$	$5,82 \cdot 10^{-3}$
Etage 2	$5,81 \cdot 10^{-3}$	$5,83 \cdot 10^{-3}$
Etage 1	$5,25 \cdot 10^{-3}$	$5,57 \cdot 10^{-3}$

On remarque que les 2 méthodes donnent des valeurs relativement proches. En considérant qu'une partie de l'erreur est due à la lecture graphique, nous pouvons considérer ces valeurs identiques. Les signaux issus de Ricker sont plus nette pour tous les modes du fait que le temps de l'expérience est plus long que par rapport au relâchement ou au coda.

4 Synthèse de la partie expérimentale

Question 2.14:

Par rapport à la méthode de Ricker on remarque que les valeurs des amortissements pour un même étage sont légèrement différentes suivant les modes. Cependant, on remarque que ces variations sont plus significatives dans le cas d'amortissements par relâchement de la structure mais ces erreurs sont peut-être dues aux erreurs expérimentales. En revanche pour un même mode, les

valeurs d'amortissements sont beaucoup plus proches entre étages pour chacune des analyses. On sait que si l'énergie dissipée est indépendante de la fréquence (donc du mode), on parle d'amortissement structural, on peut l'appliquer à notre étude. Cependant on a vu qu'il y a une différence d'amortissement selon la fréquence pour un même étage, on ne peut donc pas parler d'amortissement modal.

Question 2.15:

22 PARTIE 2 APPROCHE EXPÉRIMENTALE DES MODES DE LA MAQUETTE

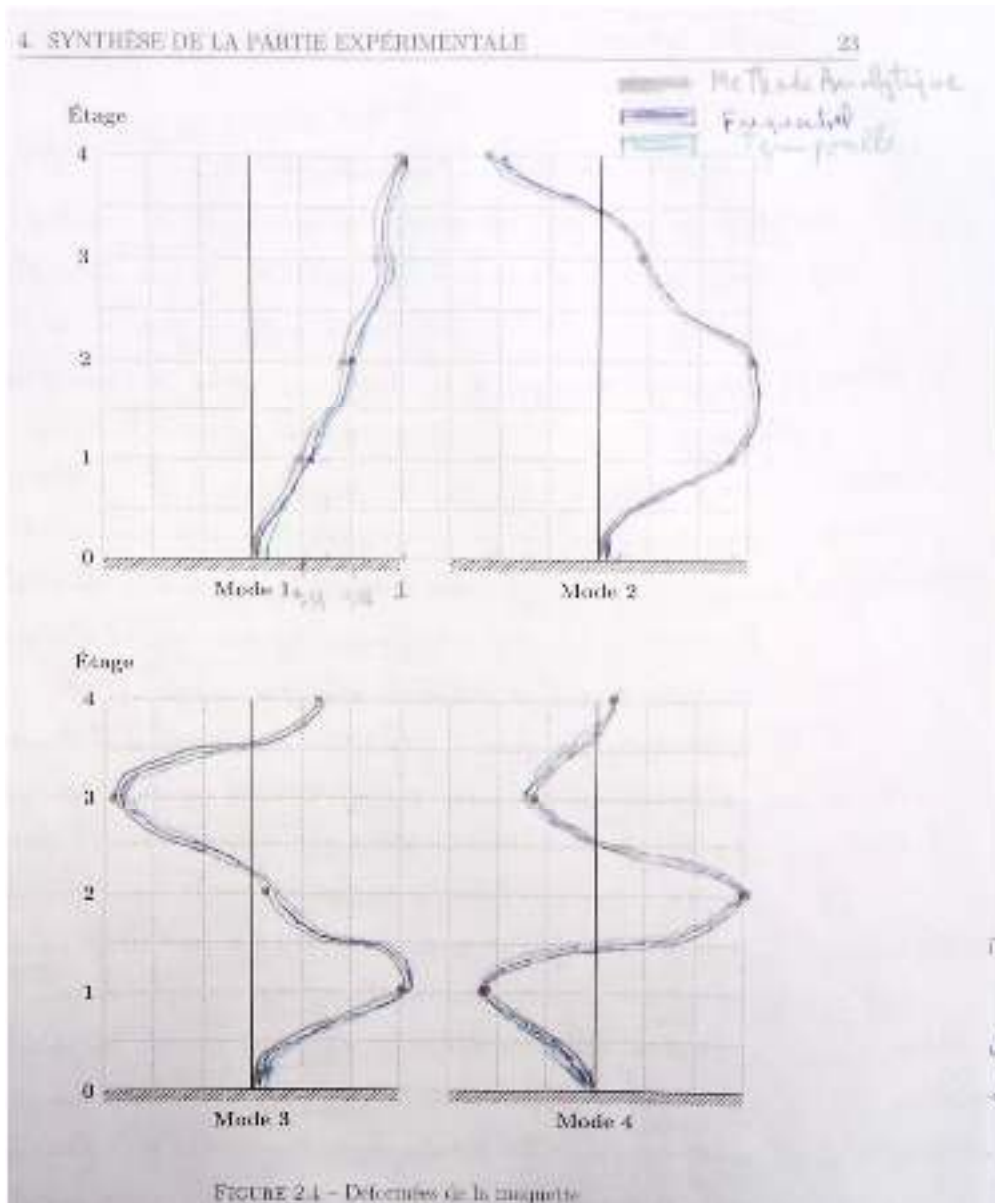
Etage	Mode 1			Mode 2		
	σ	σ	σ	σ	σ	σ
4	1	1	1,0	-0,7	-0,66	-0,73
3			0,85			0,29
2	0,64	0,65	0,62	1	1	1
1	0,33	0,37	0,34	0,32	0,899	+0,91
0		0,15	0		0,17	0

Etage	Mode 3			Mode 4		
	σ	σ	σ	σ	σ	σ
4	0,47	0,47	0,44	0,102	0,11	0,093
3			-0,98			-0,43
2	0,022	0,08	0,07	1	1	1
1	1	1	1	-0,77	-0,81	-0,75
0		0,18	0		0,15	0

TABLE 2.6 - Déformées expérimentales et théoriques

$$\Phi_{N_i}^F = \frac{HN_i}{\max HN_i} \quad \text{avec } HN_i \text{ maxima des } F_{ij}$$

$$\Phi_{N_i}^T = \frac{a_{N_i}}{\max a_{N_i}} \quad \text{avec } a_{N_i} \text{ maxima des accélérations des étages}$$



Comme on peut le voir sur cette figure il y a absence de valeur de $|F_3f|$ et de $|a_3/g|$ car absence de capteurs sur l'étage 3 : on a supposé une valeur proche de la valeur théorique pour coller à la courbe théorique. Nous avons également choisi de prendre l'allure d'une barre en flexion pour le tracé. Au mode 1, toutes les barres bougent en phase mais dans les autres modes, elles bougent en phase ou en opposition de phase par rapport à la première barre (suivant le mode). Par exemple pour le mode 4, les phases pour les étages alternent, cela se rapproche donc des résultats trouvés précédemment.

Question 2.16:

- Sollicitations par bruit blanc : cela correspond à une sollicitation équivalente pour toutes les fréquences. Cette méthode permet de déterminer la fréquence de résonance pour chaque mode à condition de faire durer l'expérience au minimum 15 minutes.

- Sollicitations par choc : les fréquences propres trouvées sont plus précises que la méthode précédente alors que l'expérience est plus courte.
- Sollicitation de Rickens : cette méthode est efficace pour évaluer la valeur de l'amortissement de la structure et de préciser les fonction de transfert autour des fréquences propres, cependant l'amplitude n'est pas toujours facile à déterminer.
- Régime forcé : on sollicite de manière sinusoïdale la structure. Cela permet de déterminer les accélérations maximale mesurée par chaque capteur et les déformations de la structure
- Relachement : lorsque le régime permanent est établi, on stoppe la sollicitation. Cette méthode est difficile à utiliser car il y a des difficultés de lecture graphique
 - Déxcrément : pas besoin de savoir la fréquence, la période n'intervient pas
 - Coda, la période intervient cependant la regression linéaire est plus fiable

Pour conclure, ces méthodes sont compatibles : aucune ne permet de déterminer toutes les caractéristiques de la structure il faut donc les combiner pour obtenir un résultat satisfaisant.

- On peut effectuer d'autres sollicitations comme l'essai de l'amortissement hystérétique mettant en évidence que l'énergie dissipée est indépendant e de la fréquence.

PARTIE 3 : APPROCHE ANALYTIQUE : LE MODELE BROCHETTE

I. Réduction du système physique : le modèle brochette

1.2 Hypothèse du modèle

Question 3.1:

1. 5/ (H5) Grâce aux caractéristiques géométriques du plancher et ceux de la barre, on peut calculer leur inertie, et on trouve que l'inertie du plancher est supérieure que celle de la barre. En observation réelle, on voit aussi que les planchers ne sont pas déformés.
2. Les planchers déplacent d'après la direction de travail des barres. Les barres n'ont pas de section symétrique alors elles travaillent suivant la direction de la côté plus petite. On trouve que $I_x > I_y$ donc ce système se déplace uniquement selon l'axe X et les déplacements suivant l'axe Y peuvent être négligés. De plus, les sollicitations de ce système sont symétriques par rapport au plan (O,x,z) alors il n'y a pas de rotation d'ensemble.
3. On utilise le tableau donné pour calculer :

La masse de tous les planchers : 1737,3 g

La masse totale de la maquette : 1994 g

On voit facilement que la masse du système concentre essentiellement aux planchers (87,12%). Le pourcentage massif des contours et des barres inter-étages est 12,88%

4. L'élanement des barres inter-étages est :

$$\frac{1}{120} = 8,33 \cdot 10^{-3} \text{ pour la barre la plus base}$$

$$\frac{1}{120} = 8,7 \cdot 10^{-3} \text{ pour les autres barres}$$

L'élanement des barres inter-étages est très faible alors elles se déforment comme des poutres en flexion.

5. On calcule la fréquence fondamentale pour chaque barre

$$f_1 = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\pi \cdot 3 \cdot 01^2}{2} \right) \sqrt{\frac{(1,6 \cdot 10^{11} \cdot 10 \cdot 1^3 / 12) / 120^3}{7800 \cdot (10 \cdot 1 \cdot 10^{-6}) \cdot 120}} = 323 \text{ Hz}$$

$$f_2 = f_3 = f_4 = 351,7 \text{ Hz}$$

Les fréquences des barres sont supérieures que la fréquence de sollicitation et elles sont trop grandes pour causer le phénomène de résonance locale.

Étage	Masse du plancher	Masse du contour	Masse de 4 barres soutenant sous le plancher
4	0,631	0,028	0,0359
	100%	4,44%	5,69%
3	0,474	0,028	0,0359
	100%	5,9%	7,57%
2	0,316	0,028	0,0359
	100%	8,86%	11,36%
1	0,316	0,028	0,0374
	100%	8,86%	11,84%

Tableau 3.1 : Masses des différents éléments de la maquette en kg et en pourcentage de la masse du plancher de l'étage considéré

1.4 Masse du modèle brochette

Question 3.2:

Calculons la masse m_N du modèle brochette :

Étage N	1	2	3	4
Masse m_N (kg)	381	380	538	677

Tableau 3.2 : Masse du modèle brochette

1.5 Raideurs du modèle brochette

Question 3.3:

Calculons la raideur k_N du modèle brochette :

Étage N	1	2	3	4
Raideur (N/m)	3704	4208	4208	4208

Tableau 3.3 : Raideur du modèle brochette

2.1 Equilibre dynamique

Question 3.4:

Equation de l'équilibre dynamique des quatre masses

$$m_1 : m_1 x_1'' = -K_1(x_1 - x_b) + K_2(x_2 - x_1)$$

$$m_2 : m_2 x_2'' = -K_2(x_2 - x_1) + K_3(x_3 - x_2)$$

$$m_3 : m_3 x_3'' = -K_3(x_3 - x_2) + K_4(x_4 - x_3)$$

$$m_4 : m_4 x_4'' = -K_4(x_4 - x_3)$$

Question 3.5 :

Equation de l'équilibre dynamique en notation complexe

$$m_1 : -m_1 \omega^2 X_1 + (K_1 + K_2) X_1 - K_2 X_2 = K_1 X_b$$

$$m_2 : -m_2 \omega^2 X_2 - K_2 X_1 + (K_2 + K_3) X_2 - K_3 X_3 = 0$$

$$m_3 : -m_3 \omega^2 X_3 - K_3 X_2 + (K_3 + K_4) X_3 - K_4 X_4 = 0$$

$$m_4 : -m_4 \omega^2 X_4 - K_4 X_3 + K_4 X_4 = 0$$

Question 3.6 :

Matrice de masse \underline{M} et raideur \underline{K} :

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 \end{bmatrix}$$

$$\underline{M} \approx \begin{bmatrix} 381 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 380 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 538 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 677 \end{bmatrix} \quad \text{unité: g}$$

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} K_1 + K_2 & -K_2 & 0 & 0 \\ -K_2 & K_2 + K_3 & -K_3 & 0 \\ 0 & -K_3 & K_3 + K_4 & -K_4 \\ 0 & 0 & -K_4 & K_4 \end{bmatrix}$$

$$\underline{K} \approx \begin{bmatrix} 7912 & -4280 & 0 & 0 \\ -4280 & 8416 & -4208 & 0 \\ 0 & -4208 & 8416 & -4208 \\ 0 & 0 & -4208 & 4208 \end{bmatrix} \quad \text{unité: N/m}$$

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} K_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 3704 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{unité: N/m}$$

Le vecteur \vec{X} est le vecteur de déplacement de chaque masse dans le repère R.

2.2 Modes de résonance

Question 3.7 :

Dans le cas de résonance, pour éviter la valeur nulle de X, la matrice $(-\omega^2 \underline{\underline{M}} + \underline{\underline{K}})$ ne peut pas être inversible, alors le déterminant de cette matrice doit être égal à 0. On calcule cette matrice avec des valeurs numériques et ω est inconnu.

$$\text{Det} = \begin{bmatrix} 7912 - 0,381\omega^2 & -4280 & 0 & 0 \\ -4280 & 8416 - 0,380\omega^2 & -4280 & 0 \\ 0 & -4280 & 8416 - 0,538\omega^2 & -4280 \\ 0 & 0 & -4280 & 4280 - 0,677\omega^2 \end{bmatrix}$$

On traite l'équation $\det(-\omega^2 \underline{\underline{M}} + \underline{\underline{K}}) = 0$

On obtient :

$$0,053 \omega^8 - 3421,236 \omega^6 + 64527588,05 \omega^4 - 3,68 \cdot 10^{11} \omega^2 + 2,34 \cdot 10^{14} = 0$$

Alors

$$\omega_1 \approx 26,914 \text{ rad/s}$$

$$f_1 \approx 4,28 \text{ Hz}$$

$$\omega_2 \approx 94,76 \text{ rad/s}$$

$$f_2 \approx 15,08 \text{ Hz}$$

$$\omega_3 \approx 137,33 \text{ rad/s}$$

$$f_3 \approx 21,86 \text{ Hz}$$

$$\omega_4 \approx 189,69 \text{ rad/s}$$

$$f_4 \approx 30,19 \text{ Hz}$$

Question 3.8 :

On réalise une série de transformation mathématique comme la suivante :

$$\text{Det}(-\omega^2 \underline{\underline{M}} + \underline{\underline{K}}) = \text{det}[\underline{\underline{M}}(\underline{\underline{M}}^{-1} \underline{\underline{K}} - \omega^2 \underline{\underline{I}})] = \text{det}(\underline{\underline{M}}) \cdot \text{det}(\underline{\underline{M}}^{-1} \underline{\underline{K}} - \omega^2 \underline{\underline{I}}) = \text{det}(\underline{\underline{M}}) \cdot \text{det}(\underline{\underline{A}} - \omega^2 \underline{\underline{I}})$$

D'autre part, $\det(-\omega^2 \underline{\underline{M}} + \underline{\underline{K}}) = 0$ alors $\det(\underline{\underline{A}} - \omega^2 \underline{\underline{I}}) = 0$ parce que $\det(\underline{\underline{M}}) \neq 0$ (La matrice M est inversible). Donc on voit facilement que ω^2_i représente les valeurs propres de la matrice A. De plus, cela est bien cohérent avec l'expression de la pulsation de résonance de modèle 1 ddl exposé en première partie.

Question 3.9 :

$$\vec{X^1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1,75 \\ 2,5 \\ 2,85 \end{bmatrix}$$

$$\vec{X^2} = \begin{bmatrix} 3,1 \\ 3,4 \\ 1 \\ -2,57 \end{bmatrix}$$

$$\vec{X^3} = \begin{bmatrix} 12,66 \\ 1 \\ -12,5 \\ 5,8 \end{bmatrix}$$

$$\vec{X^4} = \begin{bmatrix} -8,03 \\ 10,7 \\ -4,5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2.3 Réponse spectrale

Question 3.10 :

La figure s'affiche représente la relation de déplacement de X_i et X_b correspondant à chaque masse en fonction de la fréquence. De plus sur ce graphique, on peut identifier les configurations des fréquences de résonance et on constate que ces fréquences sont similaires avec les résultats expérimentaux aperçus. D'autre part, on voit facilement que les courbes de déformation ont même forme avec ce que l'on a trouvé précédemment. Alors on peut conclure que les résultats de cette partie sont bien logiques par rapport à ceux expérimentaux de la partie précédente.

2.4 Raffinement du modèle

Question 3.11 :

Il faut faire attention que l'on ne tient pas compte à l'influence de frottement pour ce modèle, alors, on peut la considérer afin d'améliorer le modèle. De plus, hors des équations au 1^{er} ordre, on peut également penser au développement des équations au 2^e ordre. Mais il faut remarquer à leurs raffinements comme la complexité ainsi que les solutions pour résoudre des calculs.

PARTIE 5 : SYNTHÈSE

Introduction

L'objectif principal de la séance est l'étude dynamique d'une structure. Il s'agit d'une maquette de quatre étages identiques utilisé pour étudier le cas du dynamisme d'un immeuble soumis à des efforts extérieurs.

La séance à débiter par les détails des objectifs fixés. Elle a ensuite été suivie d'une approche analytique de la modélisation du système, appelé modèle brochette que consiste à modéliser la structure sous la forme d'une association masse-ressort, les plateaux jouant le rôle des masses et les poteaux celui des ressorts. La deuxième étape s'est effectuée par une approche numérique, à l'aide du logiciel COMSOL, qui a permis une modélisation par éléments finis de la structure étudiée. Enfin la troisième partie s'est illustrée par une approche expérimentale. La maquette étant sollicitée par une table vibrante, la disposition d'accéléromètre sur les plateaux a permis de mesurer leur déplacement et ainsi de repérer les modes.*

Ces trois approches nous a permis d'effectuer une démarche scientifique par la comparaison des résultats obtenues. Elle nous a permis d'obtenir une approximation des déplacements possible d'un immeuble suite à une sollicitation.

Comparaison des résultats

	Approche Expérimentale	Approche Analytique	Approche Numérique
Mode 1	4.5	4.28	
Mode 2	15	15.08	
Mode 3	22	21.86	
Mode 4	30	30.19	

Nous nous excusons une fois de plus pour l'absence de partie 4, causé par une multitude de difficulté logistique et de contraintes par rapport au stage.

Nous remarquons toutefois la faible différence de résultat obtenue entre la méthode analytique et expérimentale. Notons également que cette erreur est d'autant plus faible pour des fréquences élevées (ex mode 4).