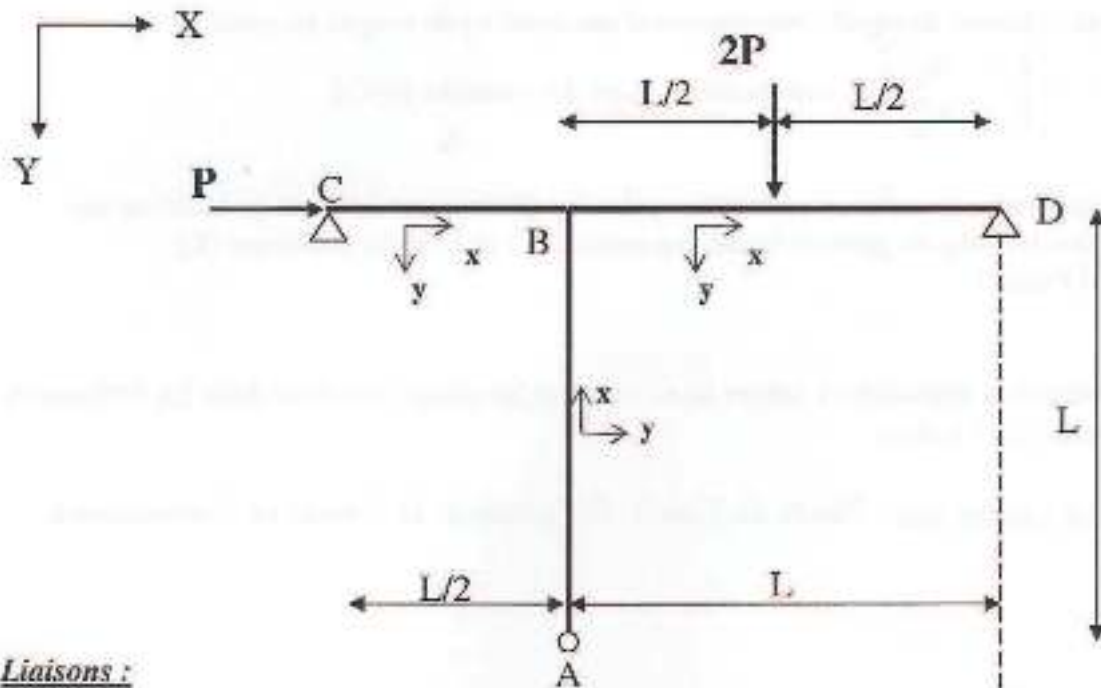


STRUCTURES
6 Novembre 2012 - Durée : 3H

I – Méthodes Manuelles : (14 points)



Liaisons :

Articulation en A
Appui simple en C et D

Chargements : $P = ql$

Force concentrée $2P$ verticale appliquée au milieu de BD
Force concentrée P horizontale appliquée en C

Caractéristiques géométriques :

Identiques pour toutes les sections : E, I, S

- Lever l'hyperstaticité par la méthode de Mohr (méthode des coupures) (3 points).
- Lever l'hyperstaticité par la méthode des Rotations (5 points).
- Tracer précisément les diagrammes des efforts internes (4 points).
- Calculer le déplacement (selon l'axe Y) sous le point d'application de la charge $2P$ et la rotation du nœud C (2 points)

NB : Lever l'hyperstaticité signifie : écrire les équations et calculer les inconnues « forces » ou « déplacements »

II – Matrices de Rigidité (Élément Fini « POUTRE »): (6 points)

Attention à la numérotation des nœuds et repères locaux (ci-dessous)

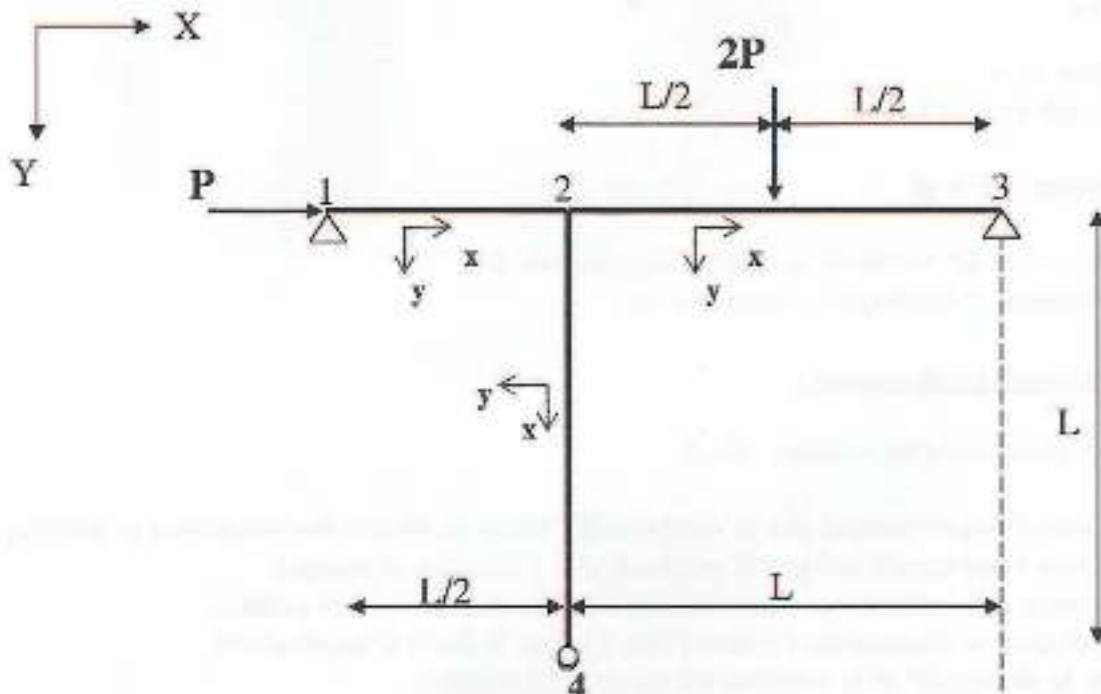
- a) Construire la Matrice de Rigidité et le Vecteur Forces nodales avant introduction des conditions aux limites en fonction des matrices de rigidité élémentaires (2 Points)

Rappel : Matrice de rigidité élémentaire d'une barre i-j du nœud i au nœud j

$$[K^{i-j}] = \begin{bmatrix} K_x^{i-j} & K_y^{i-j} \\ K_x^{j-i} & K_y^{j-i} \end{bmatrix} \text{ les sous matrices étant des matrices } (3 \times 3)$$

- b) Construire les mêmes quantités après Conditions aux Limites en fonction des caractéristiques géométriques des sections (S et I) et du Matériau (E) (3 Points)
- c) Donner la démarche à suivre pour calculer les efforts internes dans les différentes poutres (1 Point)

Documents autorisés : Notes de Cours, Polycopiés, Tableaux et Formulaires



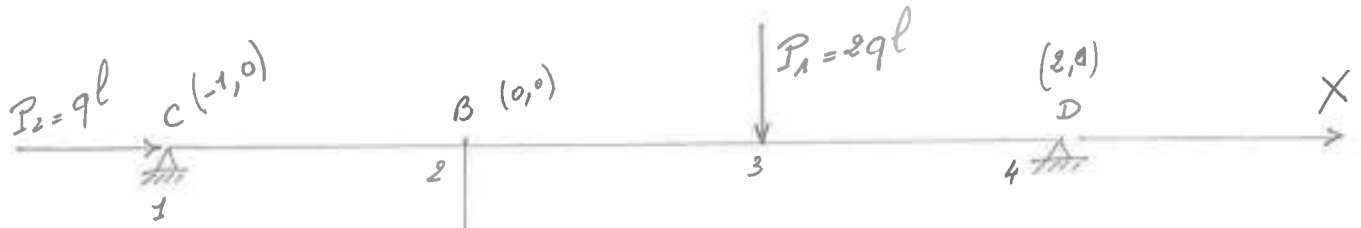
L'équipe pédagogique :

JM REYNOUARD

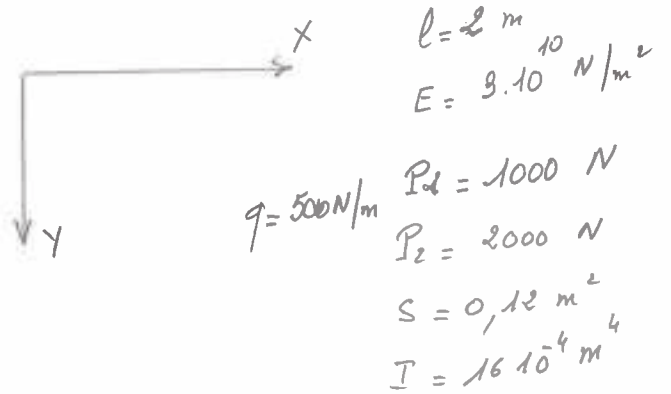
JY COLLIN

F FLEURY

Octobre 2012

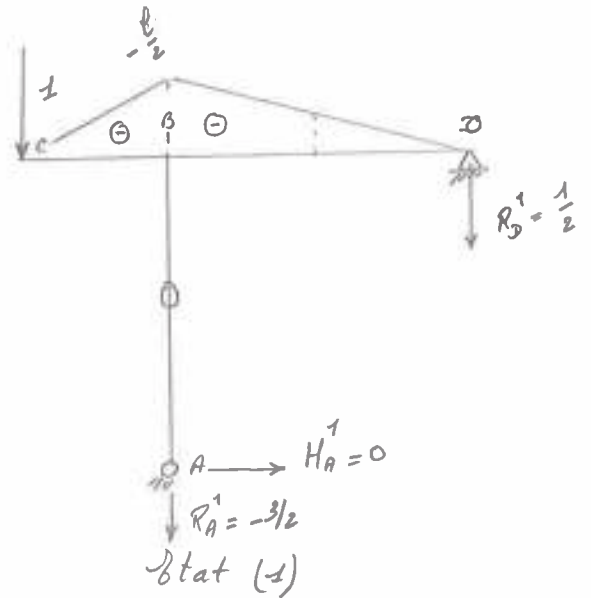
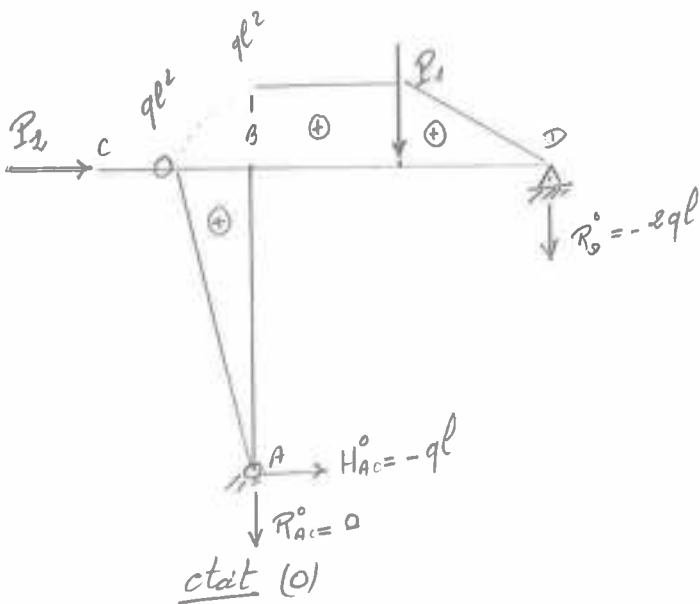


- 1) $H_A + ql = 0$
- 2) $R_C + R_D + R_A + 2ql = 0$
- 3) $ql^2 + ql^2 + R_D l - R_C \cdot \frac{l}{2} = 0$



1) Méthode de MOHR : Coupure en c

$R_C =$ Inconnue hyperstatique



Equation de Compatibilité

$$\delta_{10} + R_C \delta_{11} = 0$$

$$\delta_{11} = \frac{l^3}{8}$$

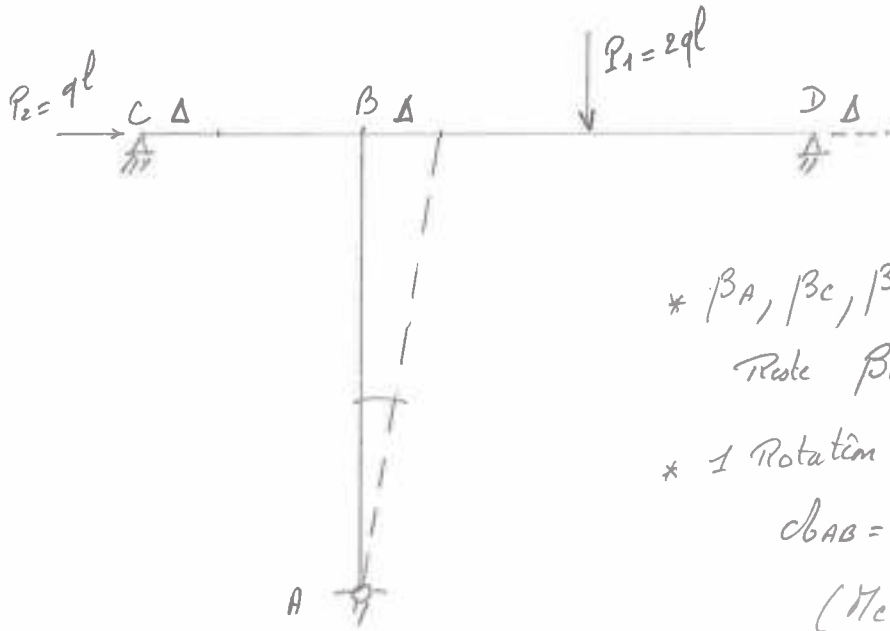
$$\delta_{10} = -\frac{11}{48} ql^4$$

$$R_C = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = \frac{11}{48} ql^4 \cdot \frac{8}{l^3} = \frac{11}{6} ql$$

$$R_D = -\frac{13}{12} ql$$

e) Méthode des Rotations

(2)



- * $\beta_A, \beta_C, \beta_D$ connus \Rightarrow éliminés
- Reste β_B : nœud rigide
- * 1 Rotation de Corp rigide
- $\delta_{BAB} = \Delta / e$ $\delta_{CBC} = \delta_{BBD} = 0$
- ($M_C = M_A = M_D = 0$)

$$M'_{BA} = \frac{3EI}{e} \beta_B - \frac{3EI}{e} \delta$$

$$M'_{BC} = \frac{3EI}{c/2} \beta_B = \frac{6EI}{c} \beta_B$$

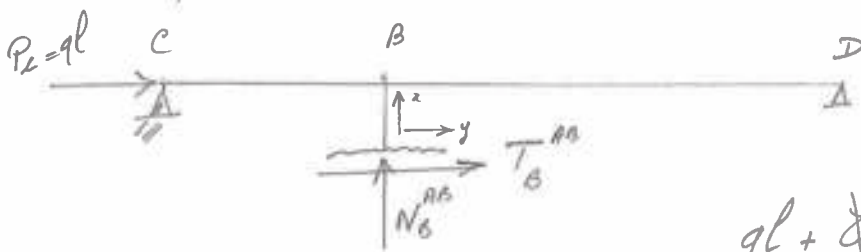
$$M'_{BD} = \frac{3EI}{e} \beta_B + M'_{DB} = \frac{3EI}{e} \beta_B - \frac{3ql^2}{16} = \frac{3EI}{e} \beta_B - \frac{3ql^2}{8}$$

1) Equation du Système à NF (β_B)

$$-M'_{BC} - M'_{BD} - M'_{BA} =$$

$$\frac{12EI}{e} \beta_B - \frac{3EI}{e} \delta - \frac{3ql^2}{8} = 0 \quad (1)$$

2) Equation du Système à N.D (δ)



$$\sum F^x = 0$$

$$ql + T_B^{AB} = 0$$

$$ql + \frac{M_B^{AB}}{e} + \frac{M'_{BA}}{e} = 0 \quad M'_{BA} = -ql^2$$

$$\frac{3EI}{e} \beta_B - \frac{3EI}{e} \delta = -ql^2 \quad (2)$$

Soit les deux équations:

$$1) 12EI \beta_B - 3EI \delta_b = \frac{3ql^3}{8}$$

$$2) 3EI \beta_B - 3EI \delta_b = -ql^3$$

$\beta_B = \frac{11}{72} \frac{ql^3}{EI} \qquad \delta_b = \frac{35}{72} \frac{ql^3}{EI}$

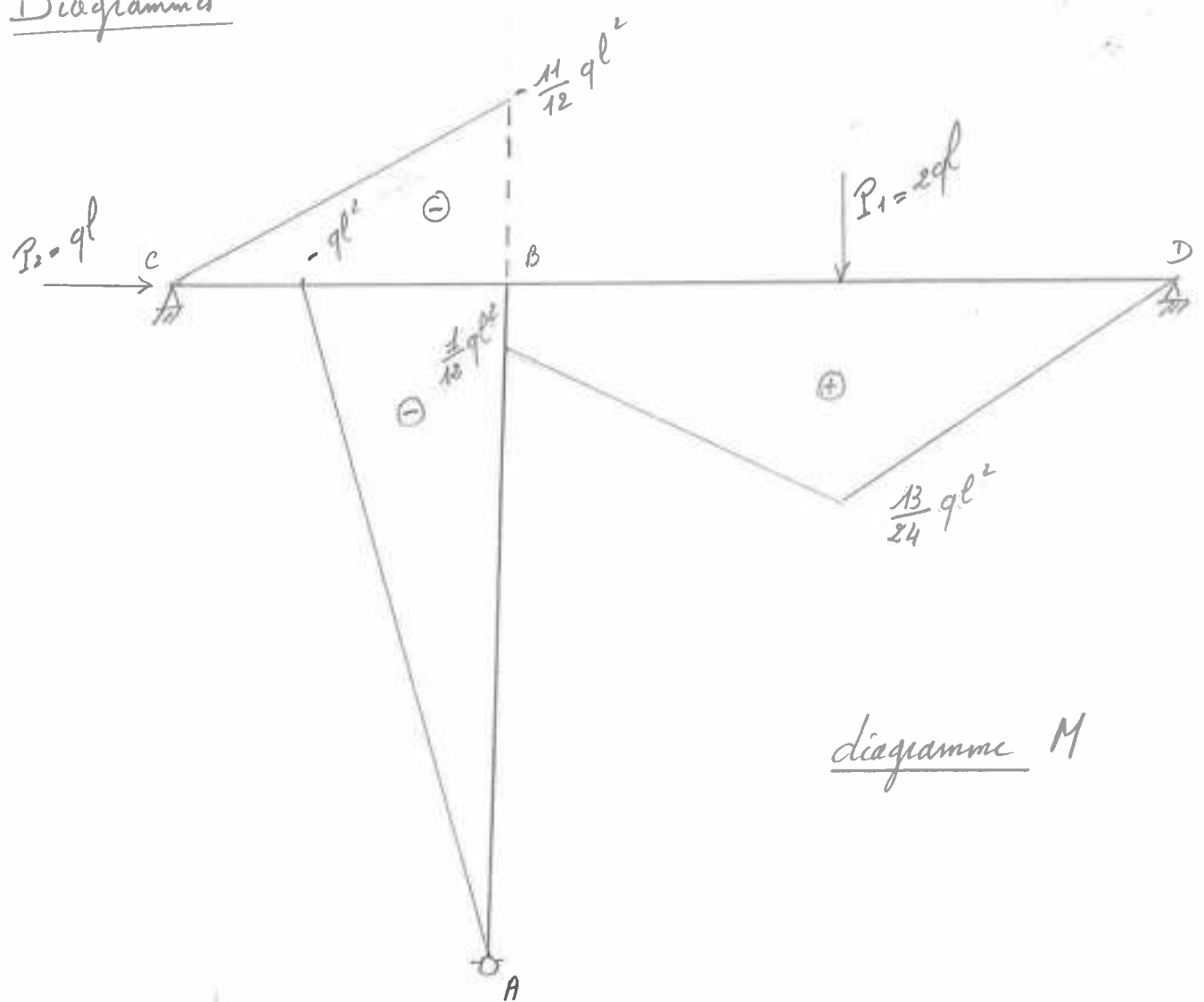
Moments aux nœuds

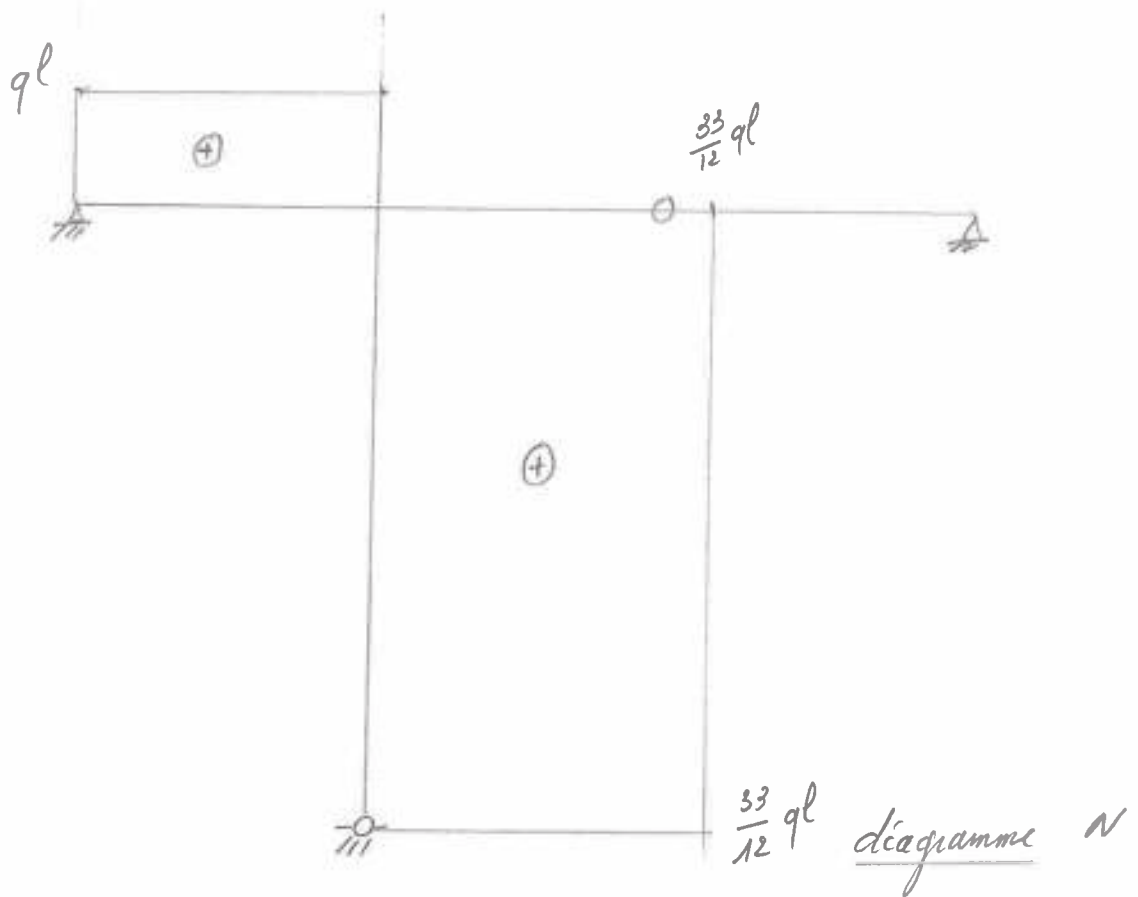
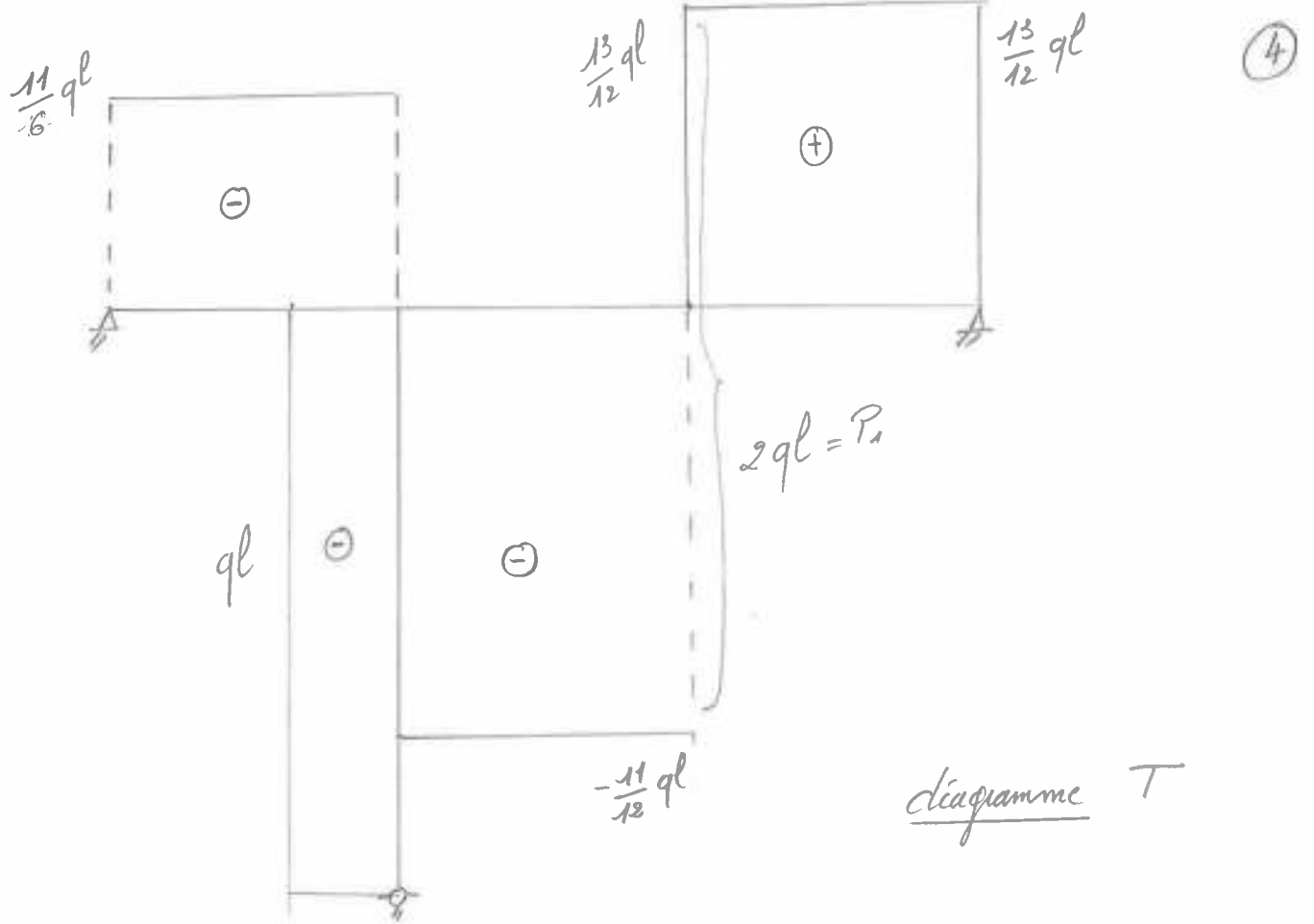
$$M'_{BA} = \frac{3EI}{l} \cdot \frac{11}{72} \frac{ql^3}{EI} - \frac{3EI}{l} \cdot \frac{35}{72} \frac{ql^3}{EI} = \frac{11}{24} ql^2 - \frac{35}{24} ql^2 = -ql^2$$

$$M'_{BC} = \frac{6EI}{l} \beta_B = \frac{6EI}{l} \cdot \frac{11}{72} \frac{ql^3}{EI} = \frac{11}{12} ql^2$$

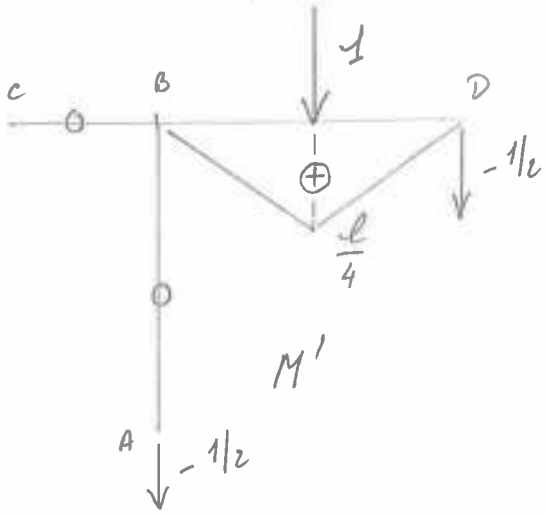
$$M'_{BD} = \frac{3EI}{l} \beta_B - \frac{3ql^2}{8} = \frac{3EI}{l} \cdot \frac{11}{72} \frac{ql^3}{EI} - \frac{3}{8} ql^2 = \left(\frac{11}{24} - \frac{3}{24} \right) ql^2 = \frac{1}{12} ql^2$$

Diagrammes





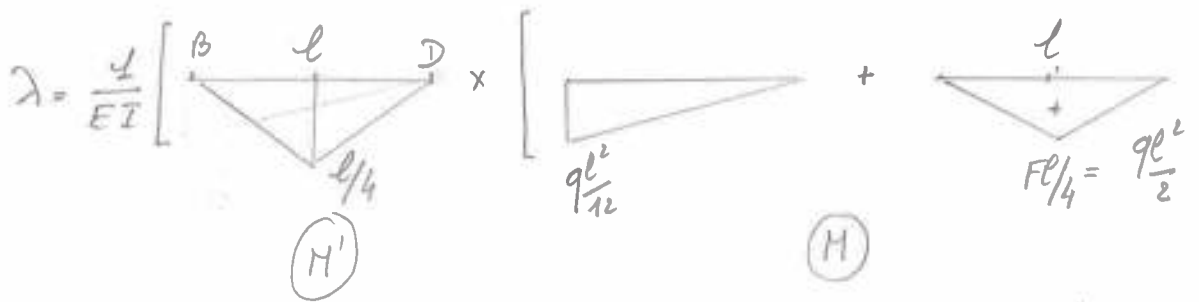
Calcul du déplacement sous la force P_1



Champ virtuel unite, SA

$$\lambda = \int_{\text{structure}} \frac{M \cdot M'}{EI} ds = \int_B^D \frac{M \cdot M'}{EI} dx$$

(Energie de Flexion)

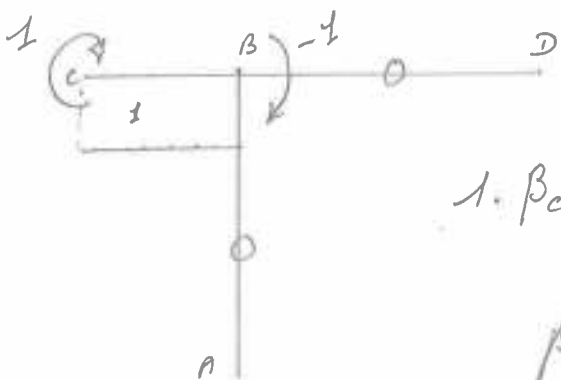


$$\frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{6} \cdot \frac{l}{4} \cdot \frac{ql^2}{12} \cdot l$$

$$\frac{1}{3} \left(\frac{l}{4} \right) \left(\frac{ql^2}{2} \right) \cdot l$$

$$\lambda = \frac{39ql^4}{64EI}$$

Calcul de la Rotation en C



(Champ virtuel SA)

$$1 \cdot \beta_c - 1 \cdot \beta_B = \frac{1}{EI} \int_C^B \frac{MM'}{EI} dx = (1 \times \beta_c)$$

le couple -1 (virtuel) travaille dans la rotation réelle par cause.

$$\beta_c = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{11ql^2}{12} \cdot \frac{l}{2} \right] - \beta_B$$

$$\beta_c = \frac{1}{2EI} \left(\frac{1}{2} \right) \cdot \left(\frac{11ql^2}{12} \right) \cdot \frac{l}{2} + \frac{11}{72} \cdot \frac{ql^3}{EI}$$

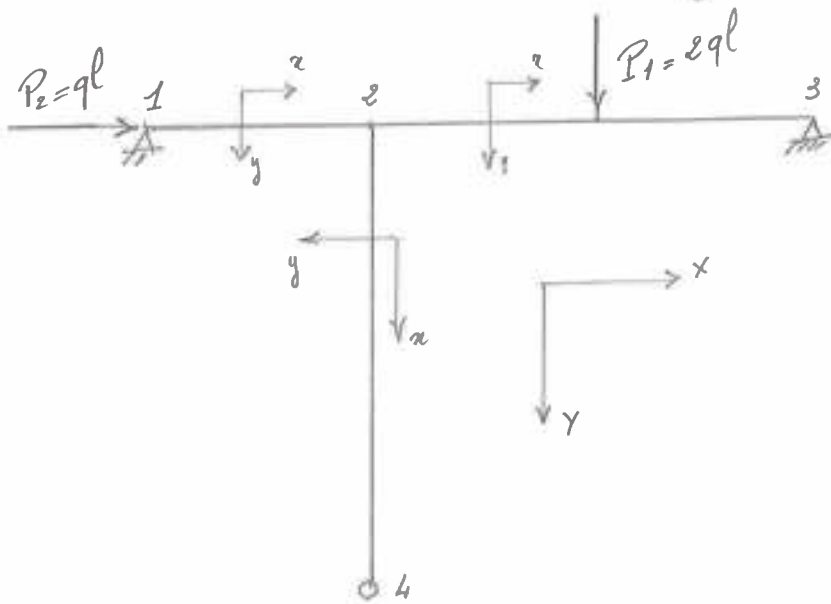
$$\beta_c = -\frac{33}{432} \cdot \frac{ql^3}{EI}$$

$$\beta_c = \left(-\frac{11}{48} + \frac{11}{72} \right) \frac{ql^3}{EI} = -\frac{33}{432} \frac{ql^3}{EI}$$

Remarque: cette rotation pourrait être calculée en considérant $\theta_{CB} = 0$

II. Méthode des Matrices de Raideur (3 poutres / 4 nœuds)

⑥



Poutre 1-2 : $l/2$
 Poutre 2-3 : l
 Poutre 2-4 : l

Poutre 1-2 : $\theta = 0^\circ$

Poutre 2-3 : $\theta = 0^\circ$

Poutre 2-4 : $\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix}$ $\theta = 90^\circ$

- Voir pages 7 et 8

P7 : Matrice de Raideur et Forces nodales avant
Conditions aux limites (12×12) et (12×1)

P8 : Matrice de Raideur et Forces nodales
Après Conditions aux limites (8×8) (8×1)

K_s + ligne et col CL bandées

(7)

U₁ V₁ β₁ U₂ V₂ β₂ U₃ V₃ β₃ U₄ V₄ β₄

Q₁ F₁
U₁ P₂
V₁ R₁
β₁ 0
U₂ 0
V₂ P₂/2
β₂ P₁/8
U₃ 0
V₃ R₃ + $\frac{P_2}{2}$
β₃ - $\frac{P_1}{8}$
U₄ H₄
V₄ R₄
β₄ 0

	$2ES/l$	0	0	$-2ES/l$	0	0												
(1)	0	$\frac{36EI}{l^3}$	$\frac{24EI}{l^2}$	0	$-\frac{36EI}{l^3}$	$\frac{24EI}{l^2}$												
	0	$\frac{24EI}{l^2}$	$\frac{8EI}{l}$	0	$-\frac{24EI}{l^2}$	$\frac{4EI}{l}$												
							$-ES/l$	0	0	$-\frac{11EI}{l^3}$	0	$-\frac{6EI}{l^2}$						
(2)							0	$-\frac{11EI}{l^3}$	$\frac{6EI}{l^2}$	0	$-\frac{ES}{l}$	0						
							0	$-\frac{6EI}{l^2}$	$\frac{2EI}{l}$	$+\frac{6EI}{l^2}$	0	$\frac{2EI}{l}$						
							ES/l	0	0	0	0	0						
(3)							0	$\frac{11EI}{l^3}$	$-\frac{6EI}{l^2}$	0	0	0						
							0	$-\frac{6EI}{l^2}$	$\frac{4EI}{l}$	0	0	0						
													$\frac{11EI}{l^3}$	0	$\frac{6EI}{l^2}$			
(4)													0	ES/l	0			
													$\frac{6EI}{l^2}$	0	$\frac{4EI}{l}$			

Symétrique

clic (2)

	U_2	V_2	β_2	
1-2	$2ES/l$	0	0	
2-3	ES/l	0	0	
2-4 (+90°)	$12EI/l^3$	0	$-\frac{6EI}{l^2}$	U_2
3-2	0	$36EI/l^3$	$-\frac{24EI}{l^2}$	
3-3	0	$12EI/l^3$	$6EI/l^2$	
3-4	0	ES/l	0	V_2
4-2	0	$-\frac{24EI}{l^2}$	$8EI/l$	
4-3	0	$6EI/l^2$	$4EI/l$	
4-4	$-\frac{6EI}{l^2}$	0	$4EI/l$	β_2

Matrice de Raideurs et Forces nodales Avant CL

$U_1 \quad V_1 \quad \beta_1 \quad U_2 \quad V_2 \quad \beta_2 \quad U_3 \quad V_3 \quad \beta_3 \quad U_4 \quad V_4 \quad \beta_4$

	$2ES/l$	0	0	$-\frac{2ES}{l}$	0	0							U_1	P_2
①	0	$\frac{36EI}{l^3}$	$\frac{24EI}{l^2}$	0	$-\frac{36EI}{l^3}$	$\frac{24EI}{l^2}$							V_1	R_1
	0	$\frac{24EI}{l^2}$	$\frac{8EI}{l}$	0	$-\frac{24EI}{l^2}$	$\frac{4EI}{l}$							β_1	0
							$-ES/l$	0	0	$-\frac{12EI}{l^3}$	0	$-\frac{6EI}{l^2}$	U_2	0
②							0	$-\frac{12EI}{l^3}$	$\frac{6EI}{l^2}$	0	$-\frac{ES}{l}$	0	V_2	$P/2$
							0	$-\frac{6EI}{l^2}$	$\frac{2EI}{l}$	$+\frac{6EI}{l^2}$	0	$\frac{2EI}{l}$	β_2	$P/8$
							ES/l	0	0	0	0	0	U_3	0
③							0	$\frac{12EI}{l^3}$	$-\frac{6EI}{l^2}$	0	0	0	V_3	$R_3 + \frac{P}{2}$
							0	$-\frac{6EI}{l^2}$	$\frac{4EI}{l}$	0	0	0	β_3	$-\frac{Pl}{8}$
							0	0	0	$\frac{12EI}{l^3}$	0	$\frac{6EI}{l^2}$	U_4	H_4
④							0	0	0	0	ES/l	0	V_4	R_4
							0	0		$\frac{6EI}{l^2}$	0	$\frac{4EI}{l}$	β_4	0

Symétric

cf end ②

	U_2	V_2	β_2	
1-2	$2ES/l$	0	0	U_2
2-3	ES/l	0	0	
2-4 (+90°)	$12EI/l^3$	0	$-\frac{6EI}{l^2}$	
	0	$36EI/l^3$	$-\frac{24EI}{l^2}$	V_2
	0	$12EI/l^3$	$6EI/l^2$	
	0	ES/l	0	
	0	$-\frac{24EI}{l^2}$	$8EI/l$	β_2
	0	$6EI/l^2$	$4EI/l$	
	$-\frac{6EI}{l^2}$	0	$4EI/l$	

Matrice de Raideurs et Forces modales Avant CL

K_A^* F_A^*

(8)

	U_1	β_1	U_2	V_2	β_2	U_3	β_3	β_4		
U_1	$\frac{2ES}{l}$	0	$-\frac{2ES}{l}$	0	0	0	0	0	ql	U_1
β_1		$\frac{8EI}{l}$	0	$-\frac{24EI}{l^2}$	$\frac{4EI}{l}$	0	0	0	0	β_1
U_2			$\frac{3ES}{l} + \frac{12EI}{l^3}$	0	$-\frac{6EI}{l^2}$	$-ES/l$	0	$-\frac{6EI}{l^2}$	0	U_2
V_2			0	$\frac{108EI}{l^3} + ES/l$	$-\frac{18EI}{l^2}$	0	$\frac{6EI}{l^2}$	0	ql	V_2
β_2			$+\frac{6EI}{l^2}$	$-\frac{18EI}{l^2}$	$\frac{16EI}{l}$	0	$\frac{2EI}{l}$	$\frac{2EI}{l}$	$ql/4$	β_2
U_3						ES/l	0	0	0	U_3
β_3						0	$\frac{4EI}{l}$	0	$-ql/4$	β_3
β_4						0	0	$\frac{4EI}{l}$	0	β_4

Matrice de Raideur K_A^* et Vecteur Forces nodales F_A^*
 Après conditions aux limites (8x8) (8x1)