I

PREMIER TEST
D'ANALYSE NUMERIQUE
2 AVRIL 2003

PROBLEME (barème : 2+5+3+4+4+2)

Dans le plan réel muni d'un repère orthonormé xOy on considère les 3 points : $A(0;0)$, $B(0;1)$ et $C(1;0)$. On note Ω l'intérieur du triangle ABC et on considère le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u(x,y) = 24/x & \text{dans} \quad \Omega \\ u(x,y) = 4x & \text{sur} \quad [AC] \cup [CB] \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}(x,y) = 16y & \text{sur} \quad]AB[\end{cases}$$

On discrétisera le problème par différences finies, en prenant un pas constant $h = 1/4$ dans les deux directions du plan et en adoptant la notation suivante : $u_1 = u(0,1/4)$, $u_2 = u(0,1/2)$, $u_3 = u(1/2,1/4)$, $u_4 = u(1/4,1/2)$, $u_5 = u(1/4,1/4)$ et $u_6 = u(0,3/4)$.

1) Calculer u_6

2) Déterminer le système linéaire vérifié par u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5

3) Montrer que la matrice d'itération de la méthode de Jacobi appliquée au système précédent est de la forme

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & \beta & 0 & 0 & \beta \\ \beta & 0 & \beta & \beta & 0 \end{pmatrix}$$

4) Dans ce problème, cette méthode converge-t-elle?

5) En utilisant la méthode de Gauss sans permutation de lignes ni de colonnes, transformer le système précédent en un système triangulaire supérieur équivalent. On donnera les différentes étapes de ce calcul.

6) En déduire u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5.

ORCESI
André
1AG7.

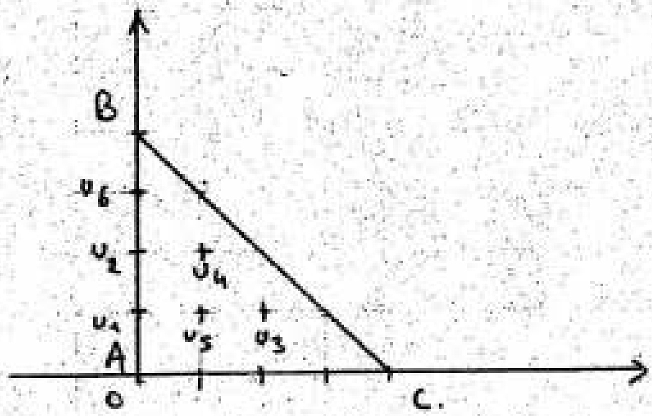
02/04/2003.

Test de Maths.

17/20

Problème.

$$\begin{cases} -\Delta u = \dfrac{24}{x} & \text{dans } \Omega. \\ u = 4x & \text{sur } [AC] \cup [CB]. \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 16y, & \text{sur }]AB[. \end{cases}$$



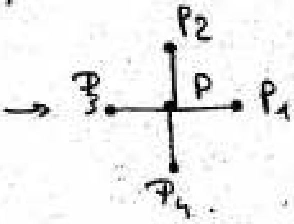
1) Appliquons un schéma à 2 points.

$$\varphi(P_1) = \varphi(P) + h\frac{\partial \varphi}{\partial x} + o(h).$$
$$= \varphi(P) - h\frac{\partial \varphi}{\partial n} + o(h).$$
$$= \varphi(P) - h(16y) + o(h).$$

$$\to \varphi(P) = \varphi(P_1) + 16\,h\,y(P).$$
$$\to u_6 = 4\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{16}{4}\,\frac{3}{4} = 4.$$

2/2

2). A l'intérieur on a un schéma à 5 points.



$$\Delta\varphi(P) = \frac{1}{h^2}\Big(\varphi(P_1) + \varphi(P_2) + \varphi(P_3) + \varphi(P_4) - 4\varphi(P)\Big)$$

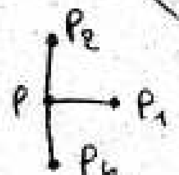
Le système linéaire est :

$$\frac{1}{4}\times\frac{16}{4} \qquad \frac{2}{4}\times\frac{16}{4}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 64 & 0 & -16 \\ 0 & -16 & 0 & 64 & -16 \\ -16 & 0 & -16 & -16 & 64 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 160 \\ 144 \\ 112 \end{bmatrix}$$

5/5

Pour le calcul de l_2 on utilise un schéma à 4 points



$$\Delta\varphi(P) = \varphi(P_2) + \varphi(P_4) + 2\varphi(P_1)$$

$$\varphi(P_1) = \varphi(P) - h\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(P).$$

$$\varphi(P_1) = \varphi(P) - 4y + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(P)$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = \frac{1}{h^2}\Big(\varphi(P_2) + \varphi(P_4) - 2\varphi(P)\Big)$$

$$\rightarrow \Delta(\varphi) = \frac{1}{h^2}\Big(\varphi(P_2) + \varphi(P_4)$$

3). On a $J = D^{-1}(E+F)$.

Avec $E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 & 0 & 0 \\ 16 & 0 & 16 & 16 & 0 \end{pmatrix}$.

$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & 0 & \\ & & \frac{1}{64} & & \\ & 0 & & \frac{1}{64} & \\ & & & & 1/64 \end{pmatrix}$.

$D^{-1}(E+F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/64 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/64 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/64 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 16 & 0 & 0 & 16 \\ 16 & 0 & 16 & 16 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 & 1/4 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$

3/3

On a bien la forme souhaitée avec $\alpha = 1$
$\beta = 1/4$.

4). Pour savoir si il y a cv il faut calculer les valeurs propres de J.

$$\chi_J = \begin{vmatrix} -X & 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & -X & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & -X & 0 & \beta \\ 0 & \beta & 0 & -X & \beta \\ \beta & 0 & \beta & \beta & -X \end{vmatrix}$$

$$= -X \begin{vmatrix} -X & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & -X & 0 & \beta \\ \beta & 0 & -X & \beta \\ 0 & \beta & \beta & -X \end{vmatrix}$$

$$+ \beta \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha \\ -X & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & -X & 0 & \beta \\ \beta & 0 & -X & \beta \end{vmatrix}$$

$$= +X^2 \begin{vmatrix} -X & 0 & \beta \\ 0 & -X & \beta \\ \beta & \beta & -X \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ -X & 0 & \beta \\ \beta & \beta & -X \end{vmatrix}$$

$$\cancel{+} -\alpha \begin{vmatrix} -X & 0 & \alpha \\ 0 & -X & 0 \\ \beta & 0 & -X \end{vmatrix}$$

ORCESI $= x^2\Big(\beta\beta x - x(x^2-\beta)\Big)$

$+\beta\Big(-\alpha(x^2-\beta^2)\Big)$

$-\alpha\Big(-x\,x^2+\beta\alpha x\Big)$

$= x^3\Big(\beta^2+\beta-x^2\Big)$

$-\beta\alpha(x^2-\beta^2)+\alpha x\Big(x^2-\beta\alpha\Big)$

En remplaçant α,β par leur valeur respective : $= \dfrac{-x\left(4x+\sqrt{\sqrt{5}+5}\right)\left(4x-\sqrt{\sqrt{5}+5}\right)\left(4x+\sqrt{5-\sqrt{5}}\right)}{256}$

$\times\left(4x-\sqrt{5-\sqrt{5}}\right)$

La valeur propre de valeur absolue la plus grande est :

$\frac{1}{4}\sqrt{\sqrt{5}+5} = \underline{0{,}67<1}.$ 4/4

Donc la méthode converge

5). Méthode de Gauss.

$$
L_5+16L_1 \leftarrow L_5 \quad
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & -1\\
0 & 1 & 0 & -1 & 0\\
0 & 0 & 64 & 0 & -16\\
0 & -16 & 0 & 64 & -16\\
0 & 0 & -16 & -16 & 48
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} u_1\\ u_2\\ u_3\\ u_4\\ u_5\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 1\\ 2\\ 160\\ 144\\ 128\end{pmatrix}
$$

$$L_4 + 16L_2 \leftarrow L_4 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 64 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 48 & -16 \\ 0 & 0 & -16 & -16 & 48 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 160 \\ 176 \\ 128 \end{pmatrix}$$

$$L_5 + \frac{L_3}{4} \leftarrow L_5 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 64 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 48 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & -16 & 44 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 160 \\ 176 \\ 168 \end{pmatrix}$$

3/4

$$L_5 + \frac{L_4}{3} \leftarrow L_5 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 64 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 48 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 44 - \frac{16}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 160 \\ 176 \\ 168 - \frac{176}{3} \end{pmatrix}$$

D'où

$$\begin{cases} u_1 - u_5 = 1 \\ u_2 - u_4 = 2 \\ 64u_3 - 16u_5 = 160 \\ 48u_4 - 16u_5 = 176 \\ \left(44 - \frac{16}{3}\right)u_5 = 168 - \frac{176}{3} \end{cases}$$

$$u_5 = \frac{82}{29}$$

$$u_4 = \frac{1}{48}\left(176 + 16 \times \frac{82}{29}\right)$$

$$u_4 = \frac{401}{87}$$

$$u_3 = \frac{1}{64}\left(160 + 16 \times \frac{82}{29}\right).$$

$$u_3 = \frac{93}{29}$$

$$u_2 = 2 + \frac{411}{87} = \frac{575}{87}.$$

$$u_1 = 1 + \frac{82}{29} = \frac{111}{29}.$$