Direction des Etudes E.N.T.P.E

Novembre 2010

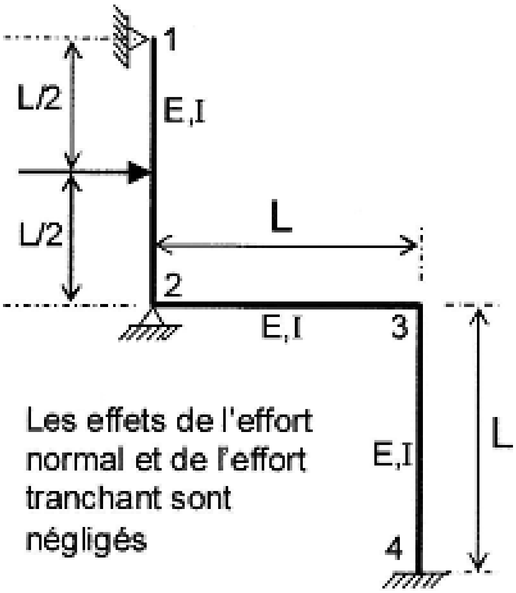
# Test de Structures $2^{ème}$ Année

Durée 3 Heures

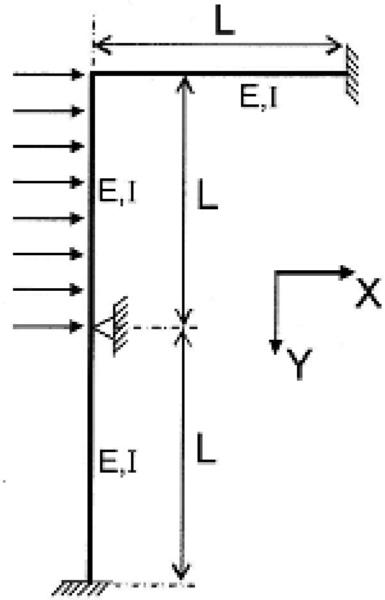
## EXERCICE N°1

1. **Pour chaque méthode manuelle utilisable pour l'étude de la structure ci-contre**
   - Définir les inconnues **pour le problème posé**
   - Préciser le **concept physique** à associer à chaque méthode.

2. **Résoudre par la méthode de votre choix :**
   - Ecrire le système d'équations et Calculer les inconnues.
   - Tracer les diagrammes des efforts .
   - Tracer la déformée, sans faire de calcul.
   - Caculer le déplacement horizontal du noeud 3.




## EXERCICE N° 2



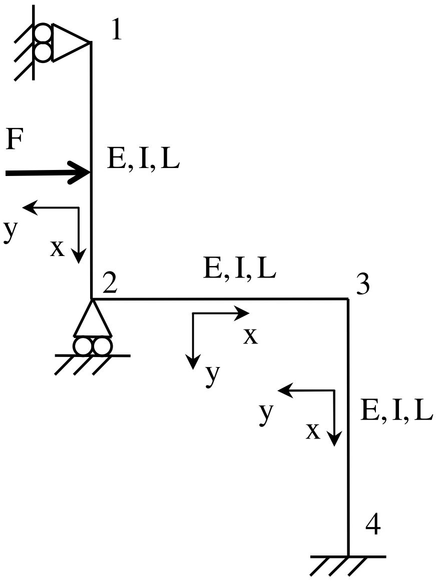

**Pour l'étude de la structure ci-contre, et dans le repère global porté sur la figure :**

En supposant que les effets de l'effort tranchant sont négligeables:

1. Etablir la matrice de rigidité assemblée en fonction de E,S,I et L.
2. Ecrire le second membre.
3. Ecrire le système final après introduction des conditions aux limites
4. Que devient le système si l'on néglige aussi l'effet d'effort normal ?
5. En négligeant les déplacements dus à l'effort normal, déterminer les inconnues primaires.
6. Calculer les réactions d'appui.

**JM REYNOUARD**

# Exercice 1



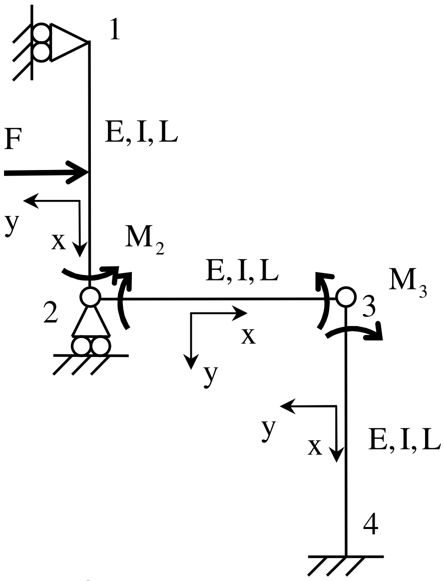

## *Méthode des forces*

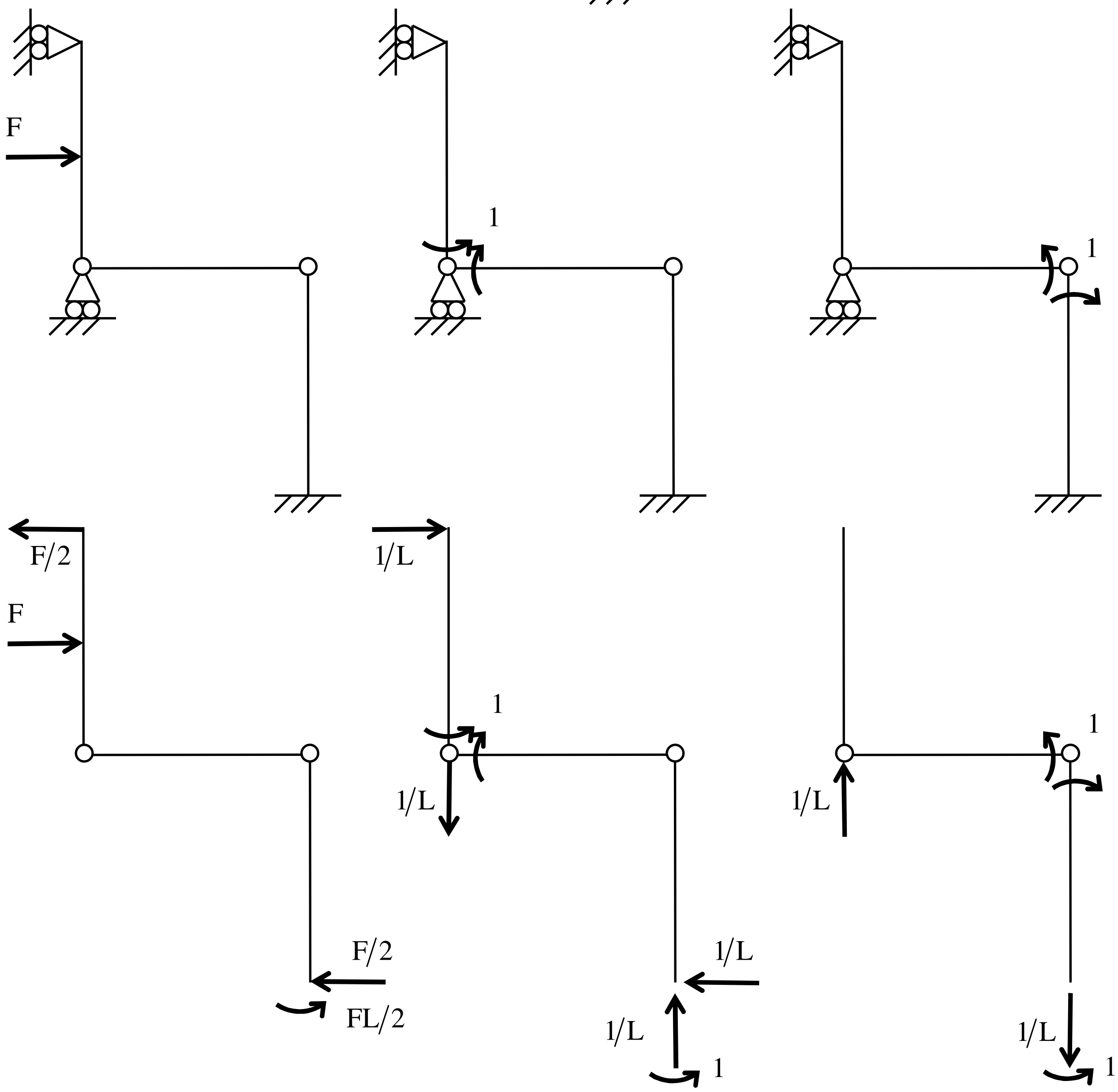
Système hyperstatique de degré 2
Les 2 inconnues sont de type statique (actions de liaison en 1 et 2 par exemple)
Les équations à mettre en place sont de type cinématique (les déplacements horizontal en 1 et vertical en 2 sont nuls)

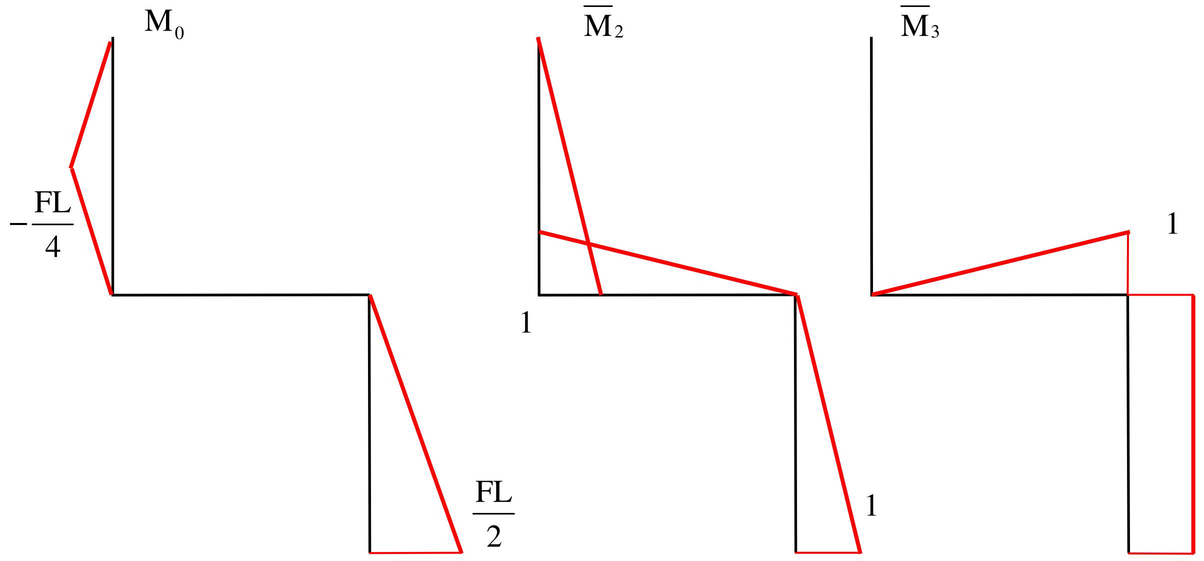
## *Méthode des rotations*

Les déformations d'effort normal et effort tranchant sont négligeables par rapport à celles du moment fléchissant.
Les 4 inconnues sont de type cinématique (rotation en 1,2 et 3 et rotation d'ensemble de la barre 3-4)
Les équations à mettre en place sont de type statique (équations d'équilibre ou PTV)
Remarque : en exprimant $M_{12} = 0$ on substitue l'inconnue $\beta_1$ et on se ramène à un système linéaire à 3 inconnues.

## *Résolution par la méthode des forces (1/2)*






$$\delta_{02}=\frac{1}{4}\left(-\frac{FL}{4}\right)\frac{L}{EI}+\frac{1}{3}\frac{FL}{2}\frac{L}{EI}=\frac{5}{48}\frac{FL^2}{EI}$$

$$\delta_{03}=\frac{1}{2}\frac{FL}{2}\frac{L}{EI}=\frac{1}{4}\frac{FL^2}{EI}$$

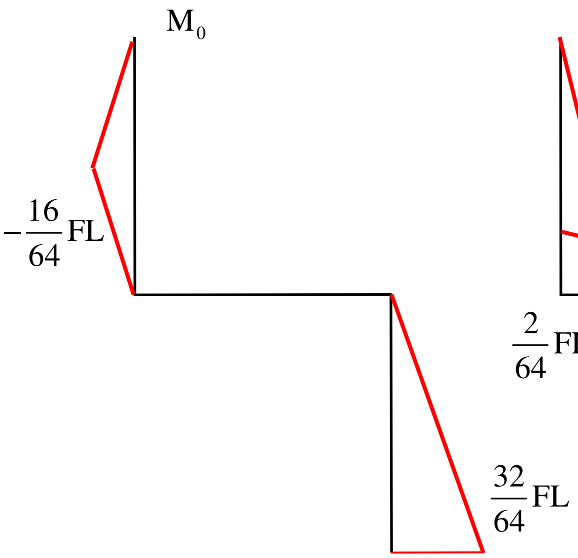
$$\delta_{22}=\frac{L}{EI} \qquad \delta_{33}=\frac{4}{3}\frac{L}{EI} \qquad \delta_{23}=\frac{2}{3}\frac{L}{EI}$$

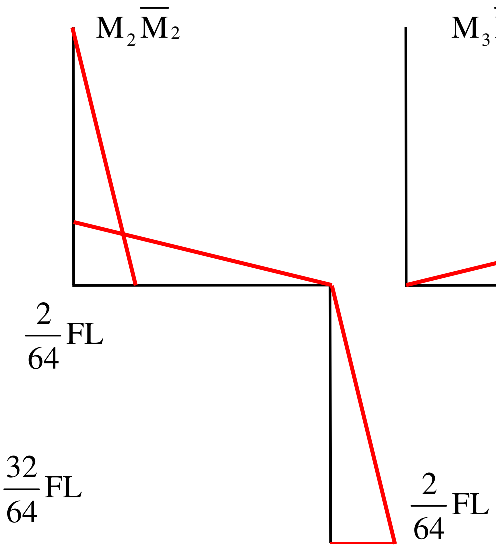
$$\frac{1}{3}\frac{L}{EI}\begin{bmatrix}3 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix}\begin{pmatrix}M_2\\ M_3\end{pmatrix}=\frac{1}{48}\frac{FL^2}{EI}\begin{pmatrix}-5\\ -12\end{pmatrix}$$

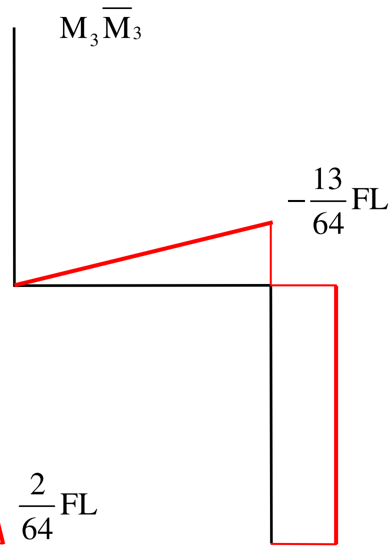
$$\begin{pmatrix}M_2\\ M_3\end{pmatrix}=\frac{1}{16}FL\frac{1}{8}\begin{bmatrix}4 & -2\\ -2 & 3\end{bmatrix}\begin{pmatrix}-5\\ -12\end{pmatrix}$$

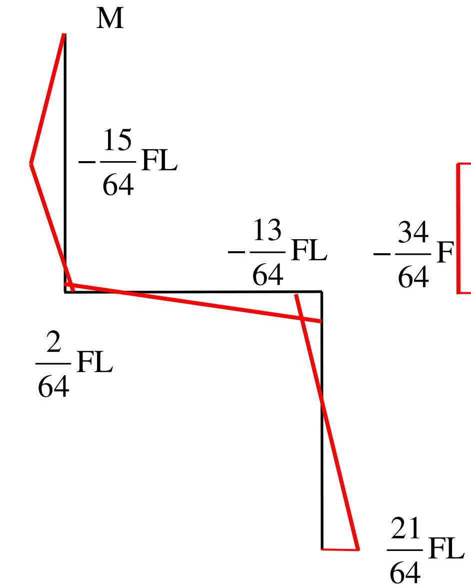
$$\begin{pmatrix}M_2\\ M_3\end{pmatrix}=\frac{1}{128}FL\begin{pmatrix}4\\ -26\end{pmatrix}$$

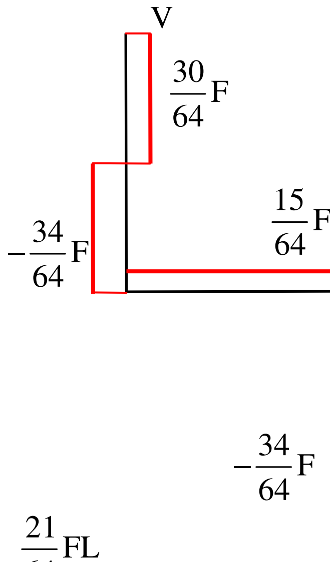
$$\begin{cases}M_2=\frac{2}{64}FL\\ M_3=-\frac{13}{64}FL\end{cases}$$

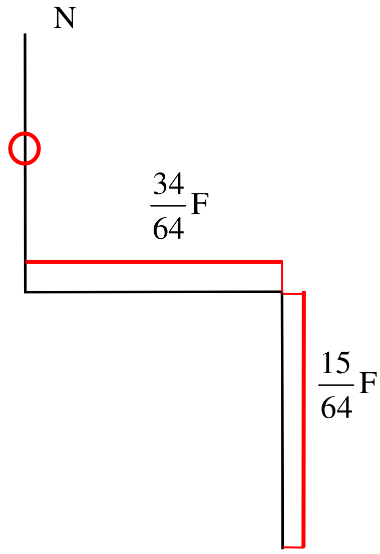

$M_0$
$-\frac{16}{64}FL$
$\frac{32}{64}FL$


$M_2\overline{M}_2$
$\frac{2}{64}FL$
$\frac{2}{64}FL$

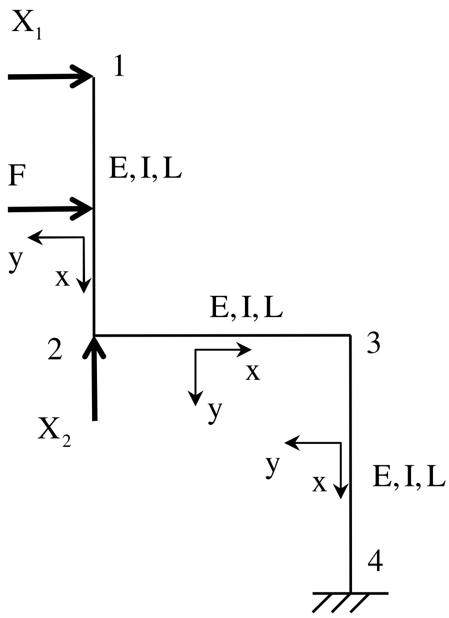

$M_3\overline{M}_3$
$-\frac{13}{64}FL$

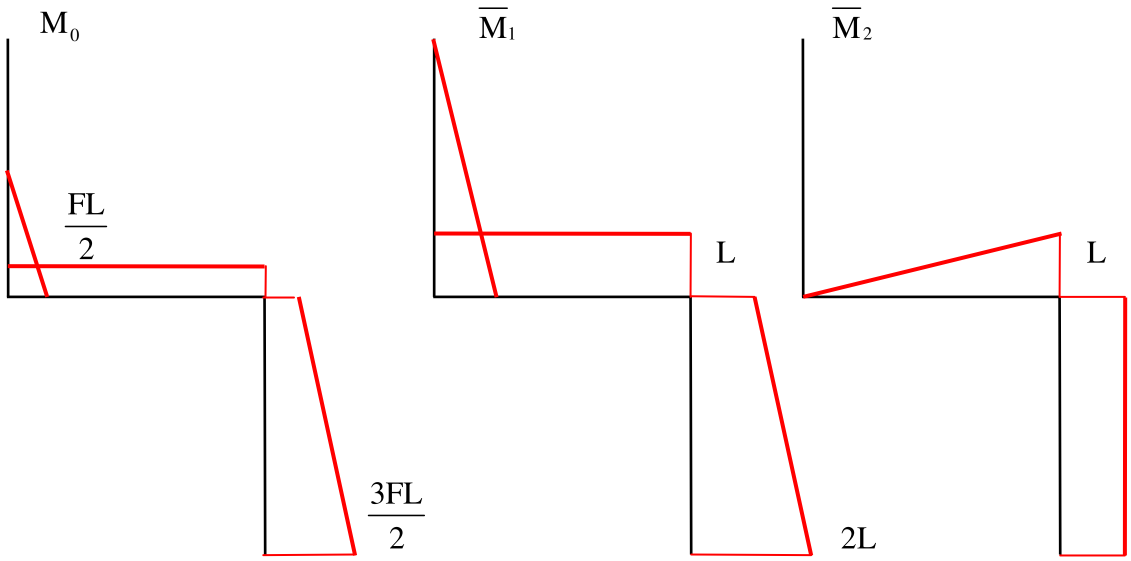

M
$-\frac{15}{64}FL$
$-\frac{13}{64}FL$
$\frac{2}{64}FL$
$\frac{21}{64}FL$


V
$\frac{30}{64}F$
$-\frac{34}{64}F$
$\frac{15}{64}F$
$-\frac{34}{64}F$


N
$\frac{34}{64}F$
$\frac{15}{64}F$

## *Résolution par la méthode des forces (2/2)*




$$\delta_{01} = \frac{5}{12}\frac{FL}{2}L\frac{L}{2EI} + \frac{FL}{2}L\frac{L}{EI} + \frac{19}{6}\frac{FL}{2}L\frac{L}{EI} = \frac{35}{16}\frac{FL^3}{EI}$$

$$\delta_{02} = \frac{1}{2}\frac{FL}{2}L\frac{L}{EI} + 2\frac{FL}{2}L\frac{L}{EI} = \frac{5}{4}\frac{FL^3}{EI}$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{3}LL\frac{L}{EI} + LL\frac{L}{EI} + \frac{7}{3}LL\frac{L}{EI} = \frac{11}{3}\frac{L^3}{EI}$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{3}LL\frac{L}{EI} + LL\frac{L}{EI} = \frac{4}{3}\frac{L^3}{EI}$$

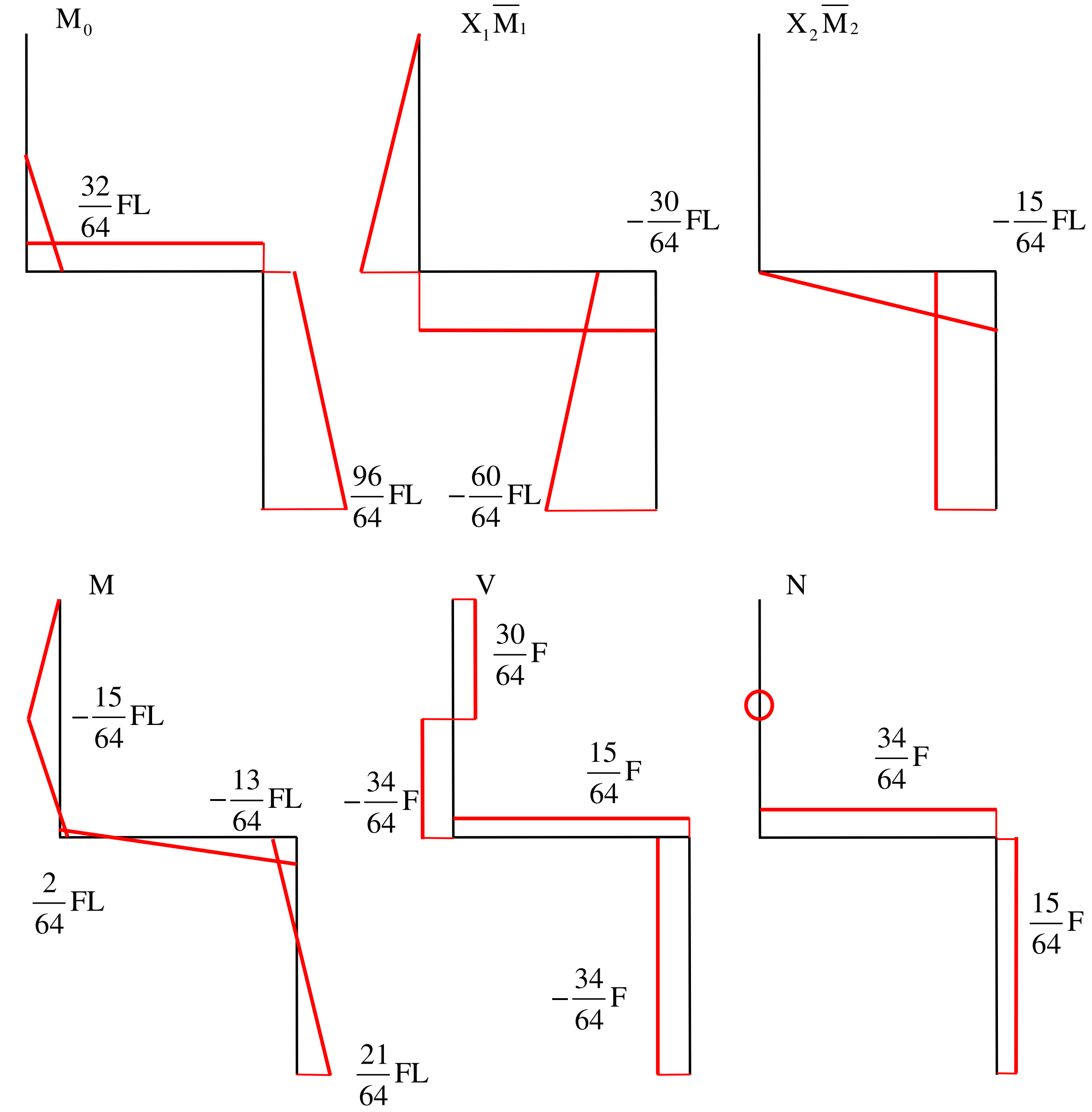
$$\delta_{12} = \frac{1}{2}LL\frac{L}{EI} + \frac{3}{2}LL\frac{L}{EI} = 2\frac{L^3}{EI}$$

$$\frac{1}{3}\frac{L^3}{EI}\begin{bmatrix}11 & 6\\ 6 & 4\end{bmatrix}\begin{pmatrix}X_1\\ X_2\end{pmatrix}=-\frac{5}{16}\frac{FL^3}{EI}\begin{pmatrix}7\\ 4\end{pmatrix}$$

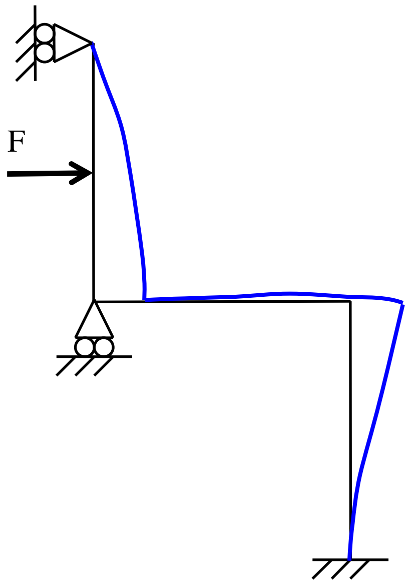
$$\begin{pmatrix}X_1\\ X_2\end{pmatrix}=-\frac{15}{16}F\frac{1}{8}\begin{bmatrix}4 & -6\\ -6 & 11\end{bmatrix}\begin{pmatrix}7\\ 4\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}X_1\\ X_2\end{pmatrix}=-\frac{15}{128}F\begin{pmatrix}4\\ 2\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}X_1=-\dfrac{30}{64}F\\[2mm] X_2=-\dfrac{15}{64}F\end{cases}$$

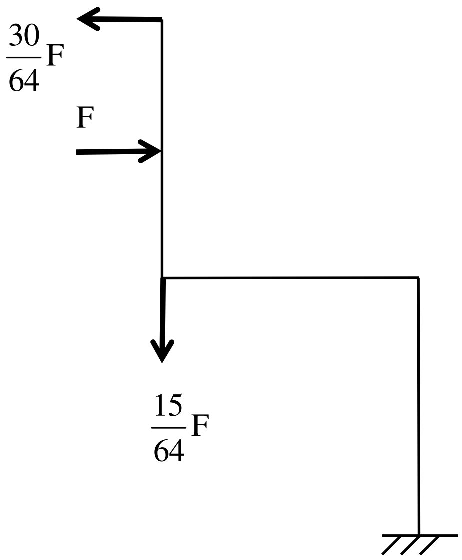


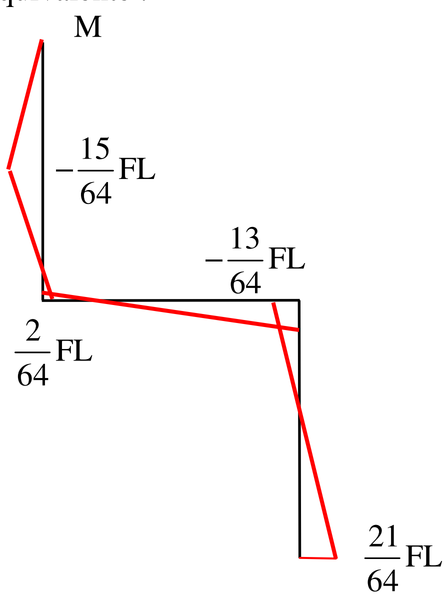

Tracé de la déformée :

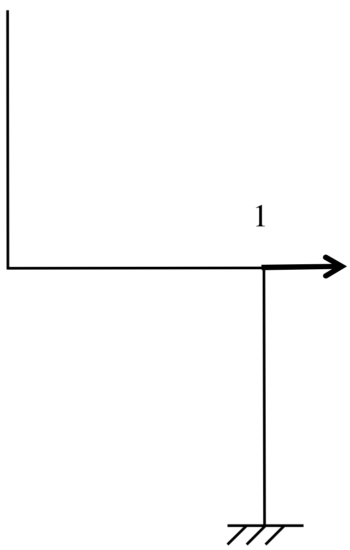


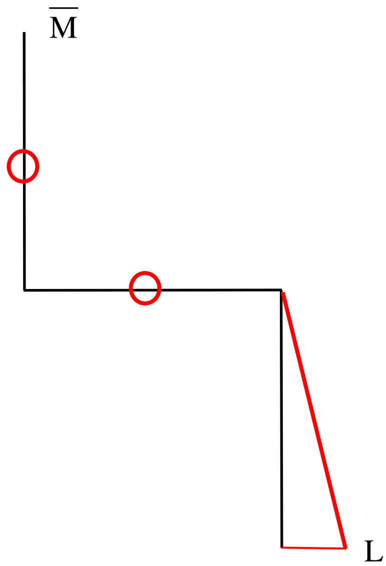

Déplacement horizontal du nœud 3 : $U_3$

On travail sur la structure isostatique associée équivalente :



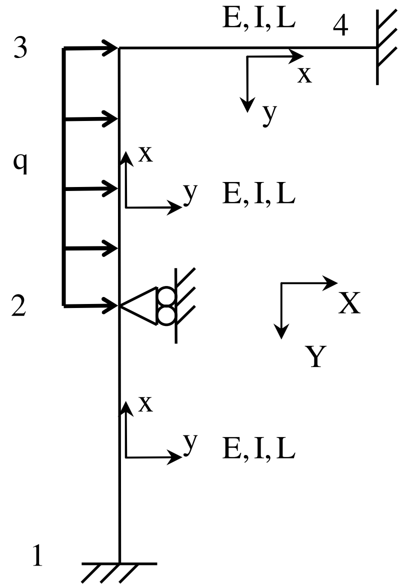



$$1.U_3 = \int_{(s)} \frac{M.\overline{M}}{EI} dx$$

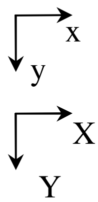
$$U_3 = \frac{1}{6}\left(-\frac{13}{64}FL\right)L\frac{L}{EI} + \frac{1}{3}\frac{21}{64}FLL\frac{L}{EI} = \frac{29}{384}\frac{FL^3}{EI}$$

## Exercice 2 :



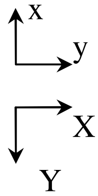

Matrice de rigidité de la poutre 3-4 dans le repère global :

$$\begin{bmatrix} \frac{ES}{L} & 0 & 0 & -\frac{ES}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{ES}{L} & 0 & 0 & \frac{ES}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$




Matrice de rigidité de la poutre 1-2 et 2-3 dans le repère global :

$$
\begin{bmatrix}
\frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} \\
0 & \frac{ES}{L} & 0 & 0 & -\frac{ES}{L} & 0 \\
\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} \\
-\frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} \\
0 & -\frac{ES}{L} & 0 & 0 & \frac{ES}{L} & 0 \\
\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L}
\end{bmatrix}
$$



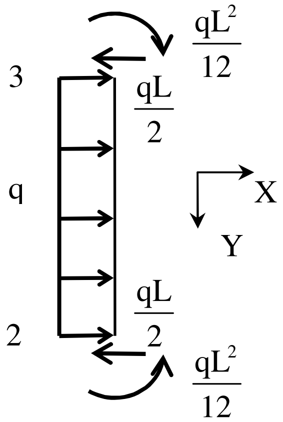

Matrice de rigidité assemblée :

$$
\begin{bmatrix}
K_{11}^{1-2} & K_{12}^{1-2} & 0 & 0 \\
K_{12}^{1-2} & K_{22}^{1-2} + K_{22}^{2-3} & K_{23}^{2-3} & 0 \\
0 & K_{23}^{2-3} & K_{33}^{2-3} + K_{33}^{3-4} & K_{34}^{3-4} \\
0 & 0 & K_{34}^{3-4} & K_{44}^{3-4}
\end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix}
\frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{ES}{L} & 0 & 0 & -\frac{ES}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3}+\frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2}+\frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\frac{ES}{L} & 0 & 0 & \frac{ES}{L}+\frac{ES}{L} & 0 & 0 & -\frac{ES}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2}+\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L}+\frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3}+\frac{ES}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{ES}{L} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{ES}{L} & 0 & 0 & \frac{ES}{L}+\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\
0 & 0 & 0 & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L}+\frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{ES}{L} & 0 & 0 & \frac{ES}{L} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L}
\end{bmatrix}
$$

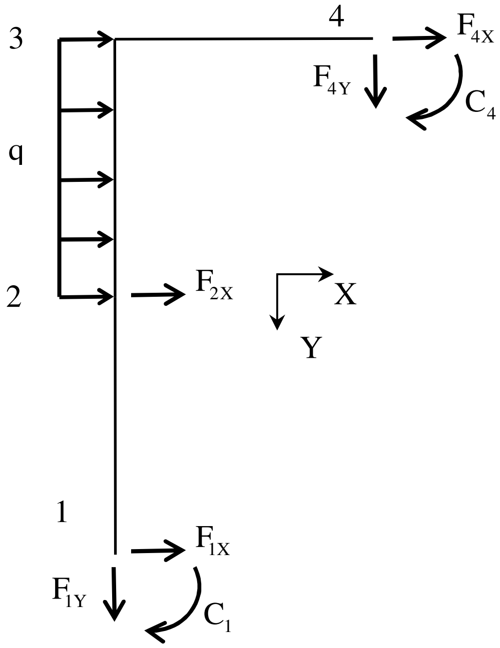
Second membre :

Efforts équivalents sur les noeuds :




$$\{\overline{F}_e\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{qL}{2} \\ 0 \\ \frac{qL^2}{12} \\ \frac{qL}{2} \\ 0 \\ -\frac{qL^2}{12} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Efforts directs sur les noeuds :




$$\{F_{ext}\} = \begin{bmatrix} F_{1X} \\ F_{1Y} \\ C_1 \\ F_{2X} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ F_{4X} \\ F_{4Y} \\ C_4 \end{bmatrix}$$

Second membre : $\{\overline{F}_e\} + \{F_{ext}\}$

Système final avec les conditions aux limites :
Inconnues cinématiques du problème : $V_2, \phi_2, U_3, V_3, \phi_3$

$$\begin{bmatrix} \frac{2ES}{L} & 0 & 0 & -\frac{ES}{L} & 0 \\ 0 & \frac{8EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3}+\frac{ES}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} \\ -\frac{ES}{L} & 0 & 0 & \frac{12EI}{L^3}+\frac{ES}{L} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{8EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ \phi_2 \\ U_3 \\ V_3 \\ \phi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{qL^2}{12} \\ \frac{qL}{2} \\ 0 \\ -\frac{qL^2}{12} \end{bmatrix}$$

En négligeant les déformations d'effort normal :

$$\frac{u_j - u_i}{L} << \phi \text{ et } \frac{ES}{L} >> \frac{EI}{L^3}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{8EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{8EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{qL^2}{12} \\ -\frac{qL^2}{12} \end{bmatrix}$$

Les inconnues du problème se résume à $\phi_2$ et $\phi_3$

Résolution :

$$\frac{2EI}{L}\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} = \frac{qL^2}{12}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\frac{qL^3}{24EI}\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{qL^3}{24EI}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{2ES}{L}V_2 - \frac{ES}{L}V_3 = 0$$

$$-\frac{6EL}{L^2}\phi_2 + \frac{ES}{L}U_3 - \frac{6EL}{L^2}\phi_3 = \frac{qL}{2}$$

$$-\frac{ES}{L}V_2 + \frac{ES}{L}V_3 + \frac{6EI}{L^2}\phi_3 = 0$$

$$V_2 = \frac{1}{4}\frac{qL^2}{ES} \qquad U_3 = \frac{1}{2}\frac{qL^2}{ES} \qquad V_3 = \frac{1}{2}\frac{qL^2}{ES}$$

Réactions d'appuis :

$$\{F_{ext}\} = [K]\{q\} - \{\overline{F}_e\}$$

$$F_{1X} = \frac{6EI}{L^2}\phi_2 + 0.\phi_3 - 0 = \frac{6EI}{L^2}\frac{qL^3}{24EI} = \frac{qL}{4}$$

$$F_{1Y} = -\frac{ES}{L}V_2 + 0.\phi_2 + 0.\phi_3 - 0 = -\frac{1}{4}qL$$

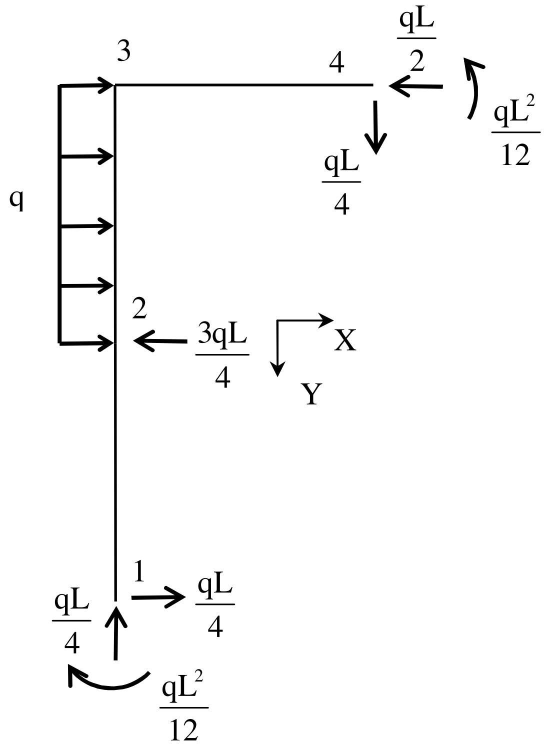
$$C_1 = \frac{2EI}{L}.\phi_2 + 0.\phi_3 - 0 = \frac{2EI}{L}\frac{qL^3}{24EI} = \frac{qL^2}{12}$$

$$F_{2X} = -\frac{12EI}{L^3}U_3 + 0.\phi_2 + \frac{6EI}{L^2}.\phi_3 - \frac{qL}{2} = -\frac{12EI}{L^3}\frac{1}{2}\frac{qL^2}{ES} + \frac{6EI}{L^2}\left(-\frac{qL^3}{24EI}\right) - \frac{qL}{2} \approx -\frac{3qL}{4}$$

$$F_{4X} = -\frac{ES}{L}U_3 + 0.\phi_2 + 0.\phi_3 - 0 = -\frac{ES}{L}\frac{1}{2}\frac{qL^2}{ES} = -\frac{1}{2}qL$$

$$F_{4Y} = -\frac{12EI}{L^3}V_3 + 0.\phi_2 - \frac{6EI}{L^2}.\phi_3 - 0 = -\frac{12EI}{L^3}\frac{1}{2}\frac{qL^2}{ES} - \frac{6EI}{L^2}\left(-\frac{qL^3}{24EI}\right) \approx \frac{qL}{4}$$

$$C_4 = \frac{6EI}{L^2}V_3 + 0.\phi_2 + \frac{2EI}{L}.\phi_3 - 0 = \frac{6EI}{L^2}\frac{1}{2}\frac{qL^2}{ES} + \frac{2EI}{L}\left(-\frac{qL^3}{24EI}\right) \approx -\frac{qL^2}{12}$$




Le système est bien en équilibre.