12 36.

PREMIER TEST D'ANALYSE NUMERIQUE 24 MARS 2004

$\left(\frac{D}{\omega} - E\right)^{-1} \left(\frac{1-\omega}{\omega} D + F\right)$

Problème (barème : 3,1,3,3,2,1,3,1,1,2)

Dans le plan réel muni d'un repère orthonormé xOy on considère les 5 points : $A(0;0)$, $B(0;1/4)$, $C(1/2;3/4)$, $D(1;1/4)$ et $E(1;0)$. On note Ω l'intérieur du pentagone ABCDE et $\partial\Omega$ sa frontière. On considère alors le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u(x,y) = 256\, xy \quad \text{dans} \quad \Omega \\ \\ u(x,y) = 4\, x \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

1) Discrétiser ce problème par différences finies, en prenant un pas constant $h = 1/4$ dans les deux directions du plan. On numérotera les points utiles du maillage $(i/4, j/4)$ avec $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, par lignes, de gauche à droite et de haut en bas. En déduire la matrice A du système linéaire obtenu ainsi que le second membre b. On écrira la matrice A avec des termes diagonaux égaux et positifs.

2) Pour résoudre ce système linéaire, on veut utiliser la suite $x_{k+1} = J\, x_k + c$ construite à l'aide de la méthode itérative de Jacobi. Ecrire la matrice J de cette méthode itérative pour le système linéaire déterminé à la première question.

3) Cette méthode converge-t-elle?

4) On veut également utiliser la suite $x_{k+1} = L\, x_k + d$ construite à l'aide de la méthode itérative de Gauss-Seidel. Ecrire la matrice d'itération L de cette

méthode appliquée au système linéaire déterminé à la première question. On admettra que si $a \neq 0$

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ b & b & a & 0 \\ 0 & 0 & b & a \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a^3}\begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 & 0 \\ -ba & -ba & a^2 & 0 \\ b^2 & b^2 & -ba & a^2 \end{pmatrix}$$

$a = 4$

5) Cette méthode converge-t-elle? $b = -1$

6) Laquelle de ces deux méthodes vaut-il mieux utiliser?

7) On considère un pas plus petit $h = 1/5$ dans les deux directions du plan. Discrétiser de nouveau le problème par différences finies. On numérotera, cette fois encore, les points utiles du maillage $(i/5, j/5)$ avec $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, par lignes, de gauche à droite et de haut en bas. En déduire la nouvelle matrice A du système linéaire obtenu. On écrira la matrice A avec des termes diagonaux égaux et positifs.

8) On note D_p la matrice tri-diagonale carrée d'ordre p, constituée d'une diagonale de 4 et d'une sur-diagonale de -1 et d'une sous-diagonale de -1. Montrer qu'il n'existe qu'une seule décomposition par blocs de A admettant des blocs diagonaux de la forme D_{p_1}, D_{p_2} et D_{p_3}. Déterminer p_1, p_2, p_3.

9) On pose alors

$$R = \begin{pmatrix} R_1 & S_1 & T_1 \\ 0 & R_2 & S_2 \\ 0 & 0 & R_3 \end{pmatrix}$$

où les blocs diagonaux R_1, R_2 et R_3 sont des matrices triangulaires supérieures à diagonales strictement positives. Ecrire les équations que doivent vérifier R_1, R_2, R_3, S_1, S_2 et T_1 pour que l'on ait la relation $A = {}^tR\,R$

10) Calculer R_1, S_1 et T_1.

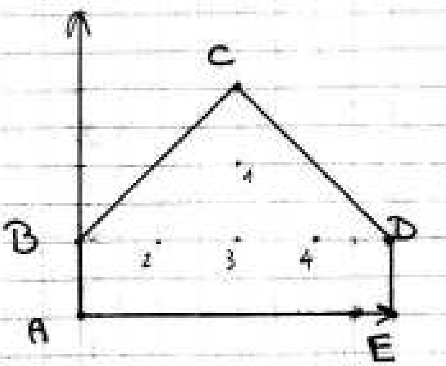
Bonnemayre
Pierre 1AG1

17

24/03/04

Test Calcul Scientifique n°1

Problème



on a : $-\Delta u(x,y) = \underbrace{256\, x \cdot y}_{= f}$ dans Ω
$u(x,y) = 4x$ sur $\partial\Omega$.

et $h = \frac{1}{4}$

Pour $P \in \{1, 2, 3, 4\}$ on a :

$$\underline{4u(P) - u(P_1) - u(P_2) - u(P_3) - u(P_4) = h^2 \cdot f(P)}$$

où P_1, P_2, P_3 et P_4 sont les points adjacents à P.

__Point 1 :__ $4u_1 - u_3 - 4 \cdot \frac{1}{2} - 4 \cdot \frac{3}{4} - 4 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16} 256 \cdot \frac{1}{4}$

Soit

$$\underline{4u_1 - u_3 = 10}$$

__Point 2 :__ $4u_2 - u_3 - 4 \cdot \frac{1}{4} - 1 = 256 \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{16}$

Soit $\underline{4u_2 - u_3 = 3}$

__Point 3 :__ $4u_3 - u_1 - u_2 - u_4 - 4 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16} \cdot 256 \cdot \frac{1}{8}$

Soit $\underline{4u_3 - u_1 - u_2 - u_4 = 4}$

__Point 4 :__ $4u_4 - u_3 - 4 \cdot \frac{3}{4} - 4 \cdot \frac{3}{4} - 4 \cdot 1 = \frac{1}{16} 256 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}$

Soit $\underline{4u_4 - u_3 = 13}$

On a donc :

$$\boxed{\underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ 4 \\ 13 \end{pmatrix}}_{b}}$$

3

2) Soit J la matrice de Jacobi.

on a $J = I - D^{-1}A$ où $D = \begin{pmatrix} 4&0&0&0 \\ 0&4&0&0 \\ 0&0&4&0 \\ 0&0&0&4 \end{pmatrix}$

D est inversible et : $D^{-1} = \frac{1}{4} \cdot I$

On a donc :

$$J = I - \frac{1}{4}A = \frac{1}{4}(4I - A)$$

Soit

$$\boxed{J = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0&0&1&0 \\ 0&0&1&0 \\ 1&1&0&1 \\ 0&0&1&0 \end{pmatrix}}$$

1

3) Pour que la méthode de Jacobi converge, il faut que son rayon spectrale soit inférieure strictement à 1. Calculons les valeurs propres de J.

$$\mathrm{Det}(J - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & -\lambda & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/4 & -\lambda \end{vmatrix} = P_J(\lambda)$$

$$P_J(\lambda) = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1/4 & 0 \\ 1/4 & -\lambda & 1/4 \\ 0 & 1/4 & -\lambda \end{vmatrix} + \frac{1}{4} \begin{vmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ -\lambda & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= +\lambda^2 \begin{vmatrix} -\lambda & 1/4 \\ 1/4 & -\lambda \end{vmatrix} + \frac{\lambda}{4} \begin{vmatrix} 1/4 & 0 \\ 1/4 & -\lambda \end{vmatrix} + \frac{\lambda}{4} \begin{vmatrix} 1/4 & 0 \\ 1/4 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^2 \left(\lambda^2 - \frac{1}{16} \right) + \frac{\lambda}{2} \left(-\frac{\lambda}{4} \right) = \lambda^4 - \frac{\lambda^2}{16} - \frac{\lambda^2}{8}$$

$$= \lambda^2 \left(\lambda^2 - \frac{3}{16} \right) = P_J(\lambda)$$

Les valeurs propres de J sont 0 (d'ordre 2) et $\frac{\sqrt{3}}{4}$ et $-\frac{\sqrt{3}}{4}$

Cette méthode converge donc car $\rho(J) = \frac{\sqrt{3}}{4} < 1$

3

4. Pour la méthode de Gauss-Seidel, on a la matrice d'itération $\mathcal{L}$ suivante :

$\mathcal{L} = (D-E)^{-1}.(F)$ où $E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ +1 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \end{pmatrix}$

et $F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

D'où $D - E = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cancel{0}4 \end{pmatrix}$

D-E est matrice triangulaire inférieure dont tous les coefficients diagonaux sont non nuls : elle est donc inversible.

D'après l'énoncé ($a = 4 \neq 0$) on a

$$(D-E)^{-1} = \frac{1}{64}\begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 16 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 16 \end{pmatrix}$$

D'où $$\mathcal{L} = \frac{1}{64}\begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 16 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit $$\mathcal{L} = \frac{1}{64}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 16 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

3

5) De même pour que cette méthode converge, il faut $\rho(\mathcal{L}) < 1$

$$P_{\mathcal{L}}(\lambda) = \det(\mathcal{L} - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/8 - \lambda & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/32 & 1/16 - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} - \lambda & 1/4 \\ 0 & 1/32 & \frac{1}{16} - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^2 \begin{vmatrix} \frac{1}{8} - \lambda & 1/4 \\ 1/32 & \frac{1}{16} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 \left(\left(\frac{1}{8} - \lambda \right)\left(\frac{1}{16} - \lambda \right) - \frac{1}{128} \right)$$

$$= \lambda^2 \left(\lambda^2 - \frac{3\lambda}{16} \right)$$

$$= \lambda^3 \left(\lambda - \frac{3}{16} \right)$$

2

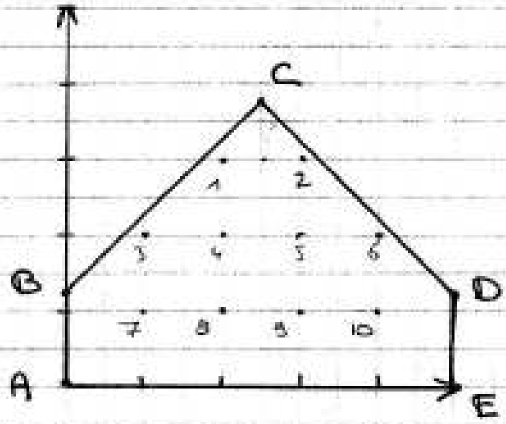
D'où $\underline{\sigma(\mathcal{L}) = \left\{0, \frac{3}{16}\right\}}$ on a donc $\rho(\mathcal{L}) < 1$

La méthode converge

6) Il faut mieux utiliser la méthode de Gauss - Seidel car elle est plus efficace pourquoi ??

↳ $\rho(L) < \rho(J)$

7)



On a "directement"* par extrapolation de la question 1).
(sans s'occuper du second membre) :

$$A = \begin{pmatrix}
40 & -4 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-4 & 40 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 40 & -4 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 \\
-10 & 0 & -10 & 40 & -10 & 0 & 0 & -10 & 0 & 0 \\
0 & -10 & 0 & -10 & 40 & -10 & 0 & 0 & -10 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 40 & 0 & 0 & 0 & -4 \\
0 & 0 & -10 & 0 & 0 & 0 & 40 & -10 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -10 & 0 & 0 & -10 & 40 & -10 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -10 & 0 & 0 & -10 & 40 & -10 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10 & 0 & 0 & -10 & 40
\end{pmatrix}$$

5

*Pour les points 4 5, 7, 8, 9 et 10 rien ne changent.
Par contre pour les points 1, 2, 3 et 6 il faut se servir de la formule en haut de la page 22 du Polycopié.
Par exemple le pas entre le point 1 et le bord est :

$$\frac{2}{5} - \frac{7}{20} = \frac{1}{20}.$$

Par exemple : $\frac{1}{h_1 h_3} + \frac{1}{h_2 h_4} = \frac{1}{\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{20}} + \frac{1}{\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{20}} = 200$

et $\frac{1}{h_1(h_1+h_3)} = \frac{1}{\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{20}\right)} = 20$

Le quotient vaut donc 10. On en déduit les termes diagonaux qui ne sont plus 4 mais 10 pour les lignes 1, 2, 3 et 5. Pour avoir des termes diagonaux égaux et positifs on multiplie ces lignes par 4 et les autres par 10.

8).