

$\det A \neq 0 \Rightarrow A$ est inversible \Rightarrow decomp LU

Jacobi: $J = -D^{-1}(L+U)$

$\rho(J) < 1 \Rightarrow$ methode est cv
ou $\rho(J) = \max_i |d_i|$ di val. propre de J

GAUSS-Seidel

$G = -(D+L)^{-1} \cdot U$

$G = -(D+L)^{-1} \cdot U$

DEMI-PROMO A
PREMIER TEST

DE CALCUL SCIENTIFIQUE

30 MARS 2005 durée 2h

~~EXERCICE 1~~ (barème : 4+2)

Dans le plan réel muni d'un repère orthonormé xOy on considère les 12 points : $A(0; 1), B(0; 2), C(1; 3), D(2; 3), E(3; 2), F(3; 1), G(2; 0), H(1; 0), K(1; 1), L(1; 2), M(2; 2), N(2; 1)$. On note Γ_1 la frontière du carré KLMN, Γ_2 la frontière du polygone ABCDEFGH et Ω l'ouvert contenu entre ces deux frontières. On considère alors le problème suivant :

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) + u(x, y) = x + y & \text{dans } \Omega \\ u(x, y) = x & \text{sur } \Gamma_1 \\ u(x, y) = y & \text{sur } \Gamma_2 \end{cases}$$

Discretiser ce problème par différences finies, en prenant un pas constant $h = 1/2$ dans les deux directions du plan. On numérotera les points utiles du maillage $(i/2, j/2)$ avec $(i, j) \in \mathbb{N}^2$, par lignes, de gauche à droite et de bas en haut. En déduire la matrice A du système linéaire obtenu ainsi que le second membre b . On écrira la matrice A avec des termes diagonaux négatifs.

~~EXERCICE 2~~ (barème : 2+4+1)

On considère le système linéaire $Ax = b$ où

$$A = \begin{pmatrix} \epsilon & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Cholesky $\Leftrightarrow A$ satisf. de forme positive: ${}^t A \cdot x > 0$
symétrique: ${}^t A = A$

$\Rightarrow A = R \cdot {}^t R$ avec R triangulaire inférieure
appliquer l'algorithme

($A = {}^t R \cdot R$, R triang. supérieure)

SOR: $G_w = (1-w)I + w \cdot G$

- 1) Déterminer pour quelles valeurs du paramètre réel ϵ , le système peut être résolu par la méthode de Cholesky.
- 2) Pour $\epsilon = 2$, résoudre $Ax = b$ en utilisant la factorisation de Cholesky de A . On pourra soit faire le calcul exact, soit un calcul numérique avec 6 décimales.
- 3) Pour $\epsilon = 0$ quel type de factorisation de la matrice A peut-on utiliser pour résoudre le système $Ax = b$ par une méthode directe? Justifier précisément votre réponse.

EXERCICE 3 (barème : 2+1+3+1)

Soit A une matrice carrée d'ordre n , d'éléments a_{ij} . On admettra sans démonstration que le rayon spectral $\rho(A)$ de A vérifie la relation suivante :

$$\rho(A) \leq \max_{i=1..n} \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right)$$

- 1) Démontrer que si A vérifie, pour tout i , l'inégalité $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$, le système $Ax = b$ peut être résolu par la méthode de Jacobi.

Dans la suite de cet exercice on considère la matrice réelle

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ b & a & c & d \\ 0 & c & a & 0 \\ 0 & d & 0 & a \end{pmatrix}$$

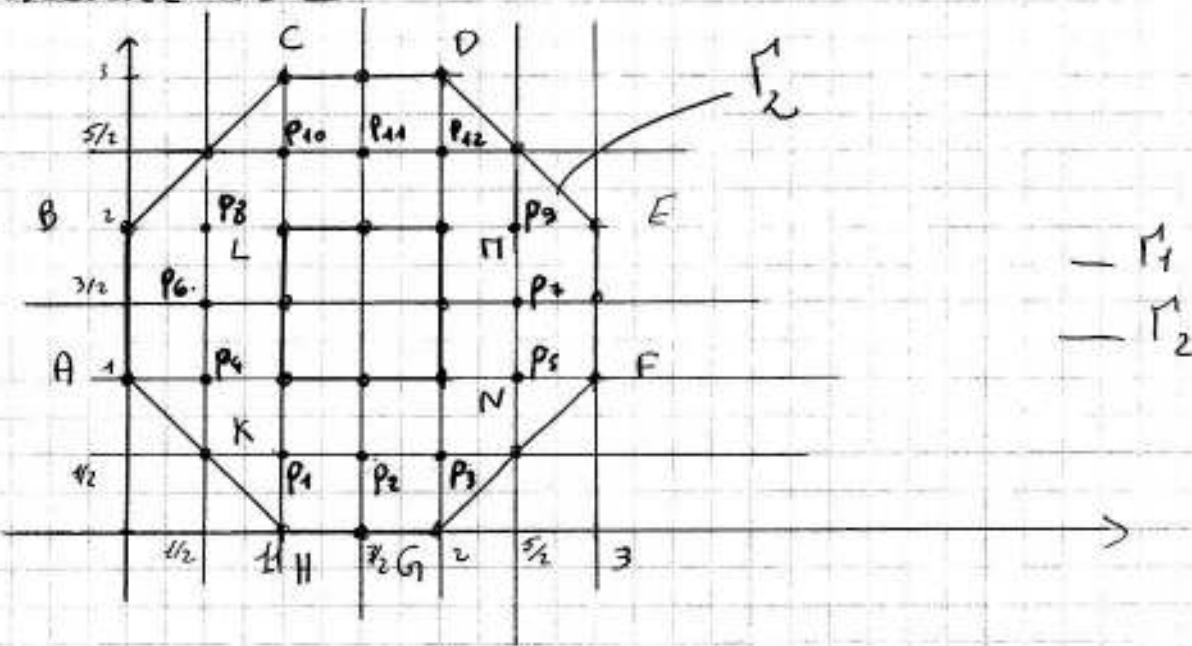
- 2) En utilisant la question précédente, donner des conditions suffisantes sur les paramètres a, b, c , et d pour que l'on puisse résoudre le système $Ax = b$ par la méthode de Jacobi.
- 3) Exprimer la matrice d'itération J de la méthode de Jacobi pour le système $Ax = b$ et en déduire les conditions nécessaires et suffisantes de convergence de cette méthode.
- 4) Donner un exemple de paramètres vérifiant les conditions trouvées en 2) 3) mais ne vérifiant pas les conditions trouvées en 3). 2)

Calcul Scientifique

Test n: 1

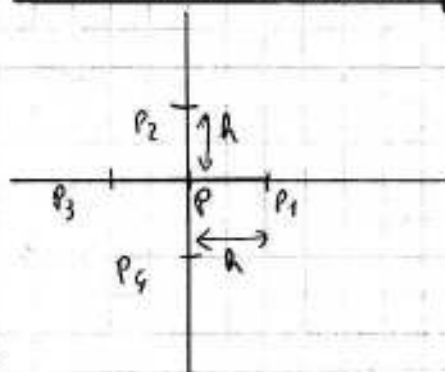
15/20

Exercice n: 1



$$\begin{cases} \Delta u(x,y) + u(x,y) = x + y & \text{ds } \Omega \\ u(x,y) = x & \text{sur } \Gamma_1 \\ u(x,y) = y & \text{sur } \Gamma_2 \end{cases} \quad h = \frac{1}{2}$$

Schema de reference:



on a alors

$$\Delta u(P) = \frac{-4u(P) + u(P_1) + u(P_2) + u(P_3) + u(P_4)}{h^2}$$

Dans notre probleme on obtient:

$$u(P)(h^2 - 4) + u(P_1) + u(P_2) + u(P_3) + u(P_4) = h^2(x + y)$$

on note $u_i = u(P_i) \quad \forall i \in \{1, 2, 3, 4\}$

on obtient

$$u_1(R^2 - 4) + u_2 + \frac{1}{2} + 0 + 1 = \frac{3}{2}$$

$$u_2(R^2 - 4) + u_1 + u_3 + \frac{3}{2} + 0 = 2$$

$$u_3(R^2 - 4) + u_2 + 0 + \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$$

$$u_4(R^2 - 4) + u_6 + 1 + \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

$$u_5(R^2 - 4) + u_7 + 1 + \frac{1}{2} + 2 = \frac{7}{2}$$

$$u_6(R^2 - 4) + u_4 + u_8 + \frac{3}{2} + 1 = 2$$

$$u_7(R^2 - 4) + u_5 + u_9 + \frac{3}{2} + 2 = 4$$

$$u_8(R^2 - 4) + u_6 + 2 + \frac{5}{2} + 1 = \frac{5}{2}$$

$$u_9(R^2 - 4) + u_7 + 2 + 2 + \frac{5}{2} = \frac{9}{2}$$

$$u_{10}(R^2 - 4) + u_{11} + 1 + 3 + \frac{5}{2} = \frac{7}{2}$$

$$u_{11}(R^2 - 4) + u_{10} + u_{12} + 3 + \frac{3}{2} = 4$$

$$u_{12}(R^2 - 4) + u_{11} + 2 + 3 + \frac{5}{2} = \frac{9}{2}$$

$$R^2 - 4 = \frac{1}{4} - 4 = \frac{-15}{4}$$

$$-\frac{15}{4} u_1 + u_2 = 0$$

$$-\frac{15}{4} u_2 + u_1 + u_3 = \frac{1}{2}$$

$$-\frac{15}{4} u_3 + u_2 = 0$$

$$-\frac{15}{4} u_4 + u_6 = -1$$

$$-\frac{15}{4} u_5 + u_7 = 0$$

$$-\frac{15}{4} u_6 + u_4 + u_8 = -\frac{1}{2}$$

$$-\frac{15}{4} u_7 + u_5 + u_9 = \frac{1}{2}$$

$$-\frac{15}{4} u_8 + u_6 = -3$$

$$-\frac{15}{4} u_9 + u_7 = -2$$

$$-\frac{15}{4} u_{10} + u_{11} = -3$$

$$-\frac{15}{4} u_{11} + u_{10} + u_{12} = -\frac{1}{2}$$

$$-\frac{15}{4} u_{12} + u_{11} = -3$$

4/4

Exercice n° 2

$$Ax = b$$

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1°) Le système peut être résolu par la méthode de Cholesky
 si la matrice A est symétrique
 / définie positive.

$$\begin{aligned} \bullet \quad x^t Ax &= (u \ v \ w) \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \\ &= (u, v, w) \begin{pmatrix} \varepsilon u + v + 2w \\ u + 3v + w \\ 2u + v + 3w \end{pmatrix} \\ &= (\varepsilon u^2 + uv + 2uw) + (uv + 3v^2 + 3vw) \\ &\quad + 2uw + wv + 3w^2 \\ &= \varepsilon u^2 + 3v^2 + 3w^2 + 2uv + 4uw + 4wv \end{aligned}$$

Il faut $x^t Ax > 0 \quad \forall (u, v, w)$

en particulier

Pour $x = (1, 0, 0)$ $x^t Ax = \varepsilon > 0$

Pour $x = (0, 1, 0)$ $x^t Ax = 3 > 0$

Pour $x = (0, 0, 1)$ $x^t Ax = 3 > 0$

donc il faut

$$\boxed{\varepsilon > 0}$$

A priori oui
 pour chacun CN
 par suffisance

45/20

1°) (suite)

De plus $\forall \varepsilon$, $A^\varepsilon = A$
donc A symétrique

Donc le système peut être résolu par la méthode de Cholesky pour $\varepsilon > 0$

2°) Pour $\varepsilon = 2$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Par Cholesky: $A = \tilde{L} \tilde{L}^t$

avec

$$\tilde{L} = (l_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 3}}$$

Application de l'algorithme de Cholesky:

 $k=1$

$$l_{11} = [a_{11}]^{1/2} = \sqrt{2}$$

 $i=2$

$$l_{21} = [a_{21}] / l_{11} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

 $i=3$

$$l_{31} = (a_{31}) / l_{11} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

 $k=2$

$$l_{22} = [a_{22} - (l_{21})^2]^{1/2} = \sqrt{3 - \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{5}{2}}$$

 $i=3$

$$l_{32} = (a_{32} - (l_{31} l_{21})) / l_{22} = \frac{1 - 1}{\sqrt{\frac{5}{2}}} = 0$$

pour $k=3$

$$l_{33} = \sqrt{a_{33} - (l_{31}^2 + l_{32}^2)}$$

$$l_{33} = \sqrt{3 - (2 + 0^2)}$$

$$l_{33} = 1$$

Bilan

$$l_{11} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$l_{21} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$l_{22} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$l_{31} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$l_{33} = 1$$

$$l_{32} = 0$$

$$\tilde{L} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Ax = b$$

$$\tilde{L} \tilde{L}^+ x = b$$

on se définit : $\tilde{L} y = b$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{y_1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} y_2 = 1 \Rightarrow y_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \left[1 - \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} y_1 + y_2 = 1 \Rightarrow y_2 = 0$$

$$y = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

On résoud

$$\tilde{L}^+ x = y$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{5}/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_3 = 0$$

$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} x_2 = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{1}{5}$$

$$\sqrt{2} x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{5} + 0 \times \sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{5\sqrt{2}} \right]$$

$$x_1 = \frac{1}{2} \left[\frac{4}{5} \right] = \frac{2}{5}$$

donc la solution est:

$$x = \begin{pmatrix} 2/5 \\ 1/5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

pour $\varepsilon = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 1 \times (-1) \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 2 \times 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -(9-1) + 2(1-6) = -8 - 10 = -18 \neq 0$$

(11)

si $\det A \neq 0$ donc on peut utiliser la décomposition LU pour le cas $E=0$.

Exercice n° 3

1)

$$2) \quad A = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ b & a & c & d \\ 0 & c & a & 0 \\ 0 & d & 0 & a \end{pmatrix}$$

Pour pouvoir résoudre par la méthode de

Jacobi :

il faut $\forall i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket, |a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$

d'après 1)

Il

faut :

$$\begin{cases} |a_{11}| > |a_{12}| + |a_{13}| + |a_{14}| \\ |a_{22}| > |a_{21}| + |a_{23}| + |a_{24}| \\ |a_{33}| > |a_{31}| + |a_{32}| + |a_{34}| \\ |a_{44}| > |a_{41}| + |a_{42}| + |a_{43}| \end{cases}$$

soit ici :

(11)

$$\begin{cases} |a| > |b| \\ |a| > |b| + |c| + |d| \\ |a| > |c| \\ |a| > |d| \end{cases}$$

Exercice 3 (suite)

2) (suite)

Les conditions suffisantes pour que l'on puisse résoudre $Ax = b$ sont

$$\text{donc } \begin{cases} |a| > |b| \\ |a| > |c| \\ |a| > |d| \\ |a| > |b| + |c| + |d| \end{cases}$$

↙

3) La matrice d'itération de la méthode Jacobi est:

$$T = -D^{-1}(L+U) = \overline{T}$$

$$D = \begin{pmatrix} a & & & \\ & a & & \\ & & a & \\ & & & a \end{pmatrix}$$

$$L+U = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 & 0 \\ b & 0 & c & d \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T = -\frac{1}{a} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & b & 0 & 0 \\ b & 0 & c & d \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{a} \begin{pmatrix} 0 & b & 0 & 0 \\ b & 0 & c & d \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc

$$\boxed{T = -\frac{1}{a} \begin{pmatrix} 0 & b & 0 & 0 \\ b & 0 & c & d \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

Cette méthode converge

$$\text{ssi } \rho(M) < 1$$

$$\rho(M) = \max | \lambda_i |$$

où λ_i = valeurs propres
de M

$$\det(M - \lambda I) =$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -b/a & 0 & 0 \\ -b/a & -\lambda & -c/a & -d/a \\ 0 & -c/a & -\lambda & 0 \\ 0 & -d/a & 0 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$-\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & -c/a & -d/a \\ -c/a & -\lambda & 0 \\ -d/a & 0 & -\lambda \end{vmatrix} + \frac{b}{a} \begin{vmatrix} -b/a & 0 & 0 \\ -c/a & -\lambda & 0 \\ -d/a & 0 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$-\lambda \left(-\frac{d}{a}\right) \begin{vmatrix} -c/a & -d/a \\ -\lambda & 0 \end{vmatrix} + d^2 \begin{vmatrix} -\lambda & -c/a \\ -c/a & -\lambda \end{vmatrix} + \frac{-b^2}{a^2} \begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$\det(M - \lambda I) =$$

$$\frac{d}{a} \frac{d}{a} \left(-\frac{d}{a}\right) + d^2 \left(+d^2 - \frac{c^2}{a^2}\right) - \frac{b^2}{a^2} d^2 = 0$$

$$-\frac{d^2}{a^2} \frac{d^2}{a^2} + d^2 \left(+d^2 - \frac{c^2}{a^2}\right) - \frac{b^2}{a^2} d^2 = 0$$

$$-d^2 \left[\frac{d^2}{a^2} - d^2 + \frac{c^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2} \right] = 0$$

$$\text{ou } \begin{cases} d = 0 \\ d^2 = \frac{c^2 + b^2 + d^2}{a^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} d = 0 \\ \text{ou} \\ d = \pm \frac{\sqrt{c^2 + b^2 + d^2}}{a} \end{cases}$$

donc $e(\pi) = \left| \frac{\sqrt{c^2 + b^2 + d^2}}{a} \right|$

3/3'

Une condition nécessaire et suffisante pour que cette méthode converge est :

ou -

$$\left| \frac{\sqrt{c^2 + b^2 + d^2}}{a} \right| < 1$$

§) on cherche a, b, c et d tels que

à justifier
numériquement

9.5/9.5

$$\left. \begin{array}{l} |a| < |b| \\ |a| < |c| \\ |a| < |d| \\ |a| < |b| + |c| + |d| \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{ne} \\ \text{vérifient} \\ \text{pas} \\ \text{conditions} \\ \text{de 2)} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{et } |a| \geq \sqrt{b^2 + c^2 + d^2} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{vérifie} \\ \text{cond.} \\ \text{de 1)} \end{array}$$