ANALYSE - TEST 1 - DUREE 2h00 - 2012/2013 - Sans document

Toutes les intégrales sont considérés au sens de la mesure de Lebesgue.

EXERCICE 1 (5 pts)

On pose pour $t \geq 0$, $h(t) = \log(1+\exp(t^2))$ où log désigne le logarithme népérien.

1) Montrer que $\exists C, \forall t \geq 0, h(t) \leq C + t^2$, avec C une constante.

2) Soit $g : [0,1] \mapsto \mathbb{R}^+$ telle que $g^2 \in L^1([0,1])$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = \frac{1}{n}\log(1+\exp(ng^2(x)))$. On veut calculer

$$L = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{n} \int_{[0,1]} \log(1+\exp(ng^2(x)))dx.$$

2.i) Montrer en utilisant le 1) que

$$\forall t \in [0,1], 0 \leq f_n(t) \leq C + g^2(t).$$

2.ii) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une fonction A_n de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que:

$$\forall t \in [0,1], f_n(t) = g^2(t) + A_n(t),$$

avec

$$0 \leq A_n(t) \leq \frac{C}{n}.$$

2.iii) Calculer la limite L.

EXERCICE 2 (5 pts)

1) On rappelle que si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et si $\mathcal{F}(f)$ désigne sa transformée de Fourier, cette dernière est une fonction continue. Que valent les $\lim_{|\lambda| \longrightarrow +\infty} |\mathcal{F}(\lambda)|$ (sans faire la preuve)?

2) Montrer que $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\mathcal{F}(f) = 0$ alors $f = 0$ dans $L^1(\mathbb{R})$.

3) Résoudre dans $L^1(\mathbb{R})$ l'équation: $f \star f = f$ où $\star$ désigne le produit de convolution.

4) Résoudre dans $L^1(\mathbb{R})$ l'équation: $f^n = f \star f \star \ldots \star f = f$ (n fois f dans le produit de convolution, $n \geq 2$.)

On veut résoudre l'équation $F(x) = 0$ où $F : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ sur I un intervalle fermé et borné de $\mathbb{R}$. On pose $G(x) = \cancel{x -} F(x)$. On suppose F indéfiniment continuement dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in I, G(x) \in I$. On suppose aussi:

$$\exists K \in [0,1[, \forall x \in I, | 1 - F'(x) | \leq K.$$

$G(x) = x - F(x)$

1) Montrer que

$$\forall x \in I, \forall y \in I, | x - y + F(y) - F(x) | \leq K | x - y |.$$

2) On considère la méthode itérative définie par:

$$\begin{cases} x_0 \in I, \\ x_{n+1} = G(x_n), n \geq 0. \end{cases}$$

2.i) Montrer que G est une contraction stricte de I dans I

2.ii) En déduire que F admet une unique solution sur I.

2.iii) On appelle $l > 0$ la mesure de Lebesgue de I. Soit $\epsilon > 0$. Donner le plus petit nombre N d'itérations suffisant pour assurer $| x_N - x^* | \leq \epsilon$ où x^* désigne la solution exacte de l'équation $F(x) = 0$.

EXERCICE 4 (5 pts)

Pour une fonction $h \in L^1(\mathbb{R})$, on note $H(\omega) = \int_{\mathbb{R}} \exp(-i\omega t) h(t) dt$.

Soit $g \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $G(\omega) = 0$ si $\omega \leq 0$ et $\int_{\mathbb{R}} \frac{| G(\omega) |^2}{| \omega |} d\omega = \frac{c_g}{2\pi} < +\infty$.

$\int_{\mathbb{R}} g e^{i\omega t} = 0$

On introduit pour $(a, b) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}$ et $f \in L^1(\mathbb{R})$:

$$W_g(f)(a, b) = \frac{1}{a} \int_{\mathbb{R}} g(\frac{t-b}{a}) f(t) dt.$$

1) Montrer que si $f \in L^1(\mathbb{R})$ est inversible par transformation de Fourier,

$$W_g(f)(a, b) = \frac{\exp(i\omega b)}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \overline{G(\omega a)} F(\omega) d\omega.$$

[la barre désigne la conjugaison complexe. Indication: on pourra s'inspirer de la preuve de la formule de Parseval - Plancherel.]

2) Montrer que si f vérifie la formule d'inversion

$$2\pi f(t) = \int_{\mathbb{R}} \exp(-i\omega t) (\int_{\mathbb{R}} \exp(i\omega s) f(s) ds) d\omega = \int_{\mathbb{R}} \exp(i\omega t) (\int_{\mathbb{R}} \exp(-i\omega s) f(s) ds) d\omega,$$

alors:

$$f(t) = \frac{2\pi}{c_g} \int_{]0,+\infty[} \int_{\mathbb{R}} W_g(f)(a, b) g(\frac{t-b}{a}) \frac{da db}{a^2}.$$

$$f(t) = \frac{2\pi}{c_g} \int_{]0;+\infty[} \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{e^{i\omega b}}{2\pi} \left(\int_{\mathbb{R}} \overline{G(\omega a)} F(\omega) d\omega \right) g\left(\frac{t-b}{a}\right) \frac{1}{a^2} \right) db \right) da$$

$$\frac{1}{\int \frac{|G(\omega)|^2}{|\omega|}}$$

RIVOIRARD Lucas

Test Analyse

15,5

Exercice n°1

1) Soit $h(t) = \ln(1+e^{t^2})$

montrons $\exists C \in \mathbb{R},\ \forall t \geq 0 \quad h(t) \leq C + t^2$

~~Soit $g(t) = \ln(1+e^{t^2}) - t^2$~~

~~$g \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R})$ donc~~

~~$g'(t) = \frac{1 + 2te^{t^2} - t^2(1+e^{t^2})}{1+e^{t^2}} = \frac{1 - t^2 + te^{t^2}(2-t)}{1+e^{t^2}}$~~

Or la fonction exp est croissant donc montrons

$\exists C \,/\, e^{h(t)} \leq e^{C+t^2}$ ie $1 + e^{t^2} \leq e^{C} \times e^{t^2}$

Or $t \geq 0$ donc $e^{t^2} \geq 1$

Donc $e^C = 2$ convient.

$\boxed{\text{On a trouvé } C = \ln(2) \text{ tel que } h(t) \leq C + t^2}$

ok

1

2) i Soit $g : [0;1] \to \mathbb{R}^+$ avec $g^2 \in \mathcal{C}_1(\mathbb{R})$

et $f_n : x \to \frac{1}{n} \ln(1 + \exp(ng^2(x)))$

Or d'après 1/,

$\exists C \,/\, \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad \ln(1+e^{t^2}) \leq C + t^2$

Or $\forall t' \in [0;1]$ $\forall n \in \mathbb{N}^+$ $ng(t) \in \mathbb{R}^+$

c'est une somme pas un produit !!

Erreur ici !

Donc

$\forall t' \in [0;1] \quad \ln(1 + \exp(ng^2(t))) \leq C\cancel{n}g^2(t)$ $C + ng^2$

Donc $\forall t' \in [0,1]$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\frac{1}{n} \ln(1 + \exp(ng^2(t))) \leq Cg^2(t)$

$\frac{C}{n} + g^2$

1

et $\forall n, \forall x,\ \exp(ng^2(x)) \geq 0$

Donc $\frac{1}{n}\ln(1+\exp(ng^2(x))) \geq 0$ 0,5

D'où

$\boxed{\forall t\in[0;1] \quad / \quad 0 \leq f_n(t) \leq C+g^2(t)}$ tu ne l'as pas montré

2ii Soit $\forall n, \forall t\in[0;1]\ A_n(t) = f_n(t) - g^2(t)$

Montrons que $0 \leq A_n \leq \frac{C}{n}$

Soit $t\in[0;1]$, $n\in\mathbb{N}^*$

On pose $A_n(t) = \frac{1}{n}\ln(1+e^{ng^2(x)}) - g^2(x)$ 0,5

Or $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad f_n - g^2(t) \leq C$

Or $-ng^2(t) \leq -g^2(t)$

Donc $\frac{1}{n}\ln(1+e^{ng^2(x)}) - g^2(x) \leq C/n$ tu ne montres rien il n'y a pas de lien ou il faut être loyal !!

Je ne vois pas l'inégalité

Donc $A_n \leq \frac{C}{n}$ OK sur le principe 0,5

et $A_n = f_n - g^2 \geq 0$ (d'après 2i)

Donc $A_n(t) = f_n(t) - g^2(t)$ $\boxed{\text{vérifie } 0\leq A_n(t) \leq \frac{C}{n}}$

2iii On a $f_n \xrightarrow[n\infty]{} g^2$ (*)

et $g^2 \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$ hypothèse

(*) car $f_n(t) = g^2(t) + A_n(t)$ et $0 \leq A_n(t) \leq \frac{C}{n}$

Donc par le théorème des gendarmes $A_n \to 0$

Donc $f_n \xrightarrow[n\infty]{} g^2$

De plus f_n est intégrable car

$\forall n, \forall t\in[0;1]\quad 0 \leq f_n(t) \leq C+g^2(t)$ (Q 2ii)

Donc $\int_0^1 |f_n(t)|dt \leq \int_0^1 |g^2(t)|\,dt + \underbrace{\int_0^1 C}_{=C}$ OK

Or g^2 est intégrable donc f_n est intégrable sur $[0;1]$

Ainsi

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_0^1 \ln(1+\exp(ng^2(x))) \, dx$$

$$= \int_0^1 \lim_{n\to} f_n(x) \, dx$$

tu utilises un théorème (lequel) convergence dominée !!

$$\boxed{L = \int_0^1 g^2(t) \, dt}$$

2

Exercice 2

1/ On a $\boxed{\lim_{|\lambda|\to+\infty} |\mathcal{F}(\lambda)| = 0}$

1

2/ Soit $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$ et $\mathcal{F}(f) = 0$

montrons $f = 0$

On a $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} \, dt = 0$

OK mais à condition que soit inversible ie $\mathcal{F}(f) \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$

et on sait que $\mathcal{F}^*(\mathcal{F}(f)) = 2\pi f$

Or $\mathcal{F}^*(\mathcal{F}(f)) = \mathcal{F}^*(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} 0 \times e^{i\omega t} \, dt = 0$

1

Donc $2\pi f = 0$ d'où $f = 0$ (dans $\mathcal{L}_1(\mathbb{R})$)

3/ Soit (E) : $f * f = f$ $\quad f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$

Soit f solution de E alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) f(t) \, dt = f(x)$$

Or on sait que $\mathcal{F}(f*f) = F \times F$ avec $F = \mathcal{F}(f)$
(car $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et F ...)

On a donc

$(E) \Leftrightarrow F \times F = F$

$\Leftrightarrow F=0$; $F=1$ → Cas impossible d'après le 2)

Donc d'après (2) on a

$f = \tilde{0}$ qui est solution

et

~~$f = 1$ si $t=0$, 0 sinon~~ (= Dirac) qui est solution
impossible

Donc $\boxed{S(E) = \{ \tilde{0} \; ; \; \cancel{f = 1 \text{ si } t=0, \ 0 \text{ sinon}} \}}$

1

4/ En appliquant la même méthode on obtient

$\mathcal{F}(f^n) = \mathcal{F}(f)$

Donc $\prod_{i=1}^{n} \mathcal{F}(f) = \mathcal{F}(f)$ — $\mathcal{F}(f) = 1$ impossible d'après le 2)

* Si $n-1$ est impair / ie si $\exists p \in \mathbb{N}$ / $n-1 = 2p-1$ alors

$\cancel{\prod_{i=1}^{2p-1} \mathcal{F}(f) = 1}$ Cas impossible ou $\mathcal{F} = \tilde{0}$

Donc $S(E) = \{ \tilde{0} \; ; \; \cancel{f : x \mapsto 1 \text{ si } x=0, \ 0 \text{ sinon}} \}$

1

* Si $n-1$ est pair / ie si $\exists p \in \mathbb{N}$ / $n-1 = 2p$ alors

$\cancel{\mathcal{F}(f)(\omega) = 1}$ ou $\mathcal{F}(f)(\omega) = -1$ ou $\mathcal{F}(f) = 0$

Donc $S(E) = \{ \tilde{0} \; ; \; f : x \mapsto 1 \text{ si } x=0, \ 0 \text{ sinon} \; ; \; f : x \mapsto -1 \text{ si } x=0, \ 0 \text{ sinon} \}$

RIVOIRARD LUCAS

Test 1 - Analyse

Exercice 3

1/ Comme $F \in C^\infty$ et que

$\forall x \in I, \quad G(x) = x - F(x),$

G est continue et C^∞

Ainsi on peut appliquer le théorème des accroissements finis :

$\forall (x,y) \in I^2 \quad |G(x) - G(y)| \leq K|x-y|$

ok sur principe mais mal justifié

car on a supposé que

$\exists K \in [0;1[\; / \; \forall x \in I \; / \; |G'(x)| < K$ $\quad (G'(x) = 1 - F'(x))$

ok

le th des accroissements finis ne te donne pas exactement ça !!

D'où comme $G(x) = -F(x) + x$

On a

$$\boxed{\forall (x,y) \in I^2 \; / \; |x - y + F(y) - F(x)| \leq K|x-y|}$$

1

2/ On a supposé que

$\exists K \in [0;1[\; / \; \forall x \in I, \; |1 - F'(x)| \leq K$

ie $|G'(x)| \leq K$

Donc comme $0 \leq K < 1$, G est contractante

De plus on a supposé $\forall x \in I, G(x) \in I$

$\boxed{\text{Donc } G \text{ est bien une contraction stricte de } I \text{ dans } I}$

1

2.ii D'après le théorème du point fixe comme

* G est une contraction stricte de I vers I
* I fermé borné et inclut dans $\mathbb{R}$ qui est un espace complet donc I est un espace complet

A condition qu'il soit un espace métrique (muni de la distance classique $d(a,b) = |b-a|$

Donc G admet un unique point fixe

Ainsi $\exists!\, x_0 \in I / G(x_0) = x_0$

ie comme $\forall x / G(x) = x - F(x)$

$\exists!\, x_0 \in I \; F(x_0) = 0$

Ainsi : $(E) : F(x) = 0$ admet une unique solution sur I

1

2.iii On sait que

$$|x_0 - x_n| \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1)$$

On veut que $|x_n - x^*| \leq \varepsilon$

Donc il faut

$$d(x_0, x_1) \times \varepsilon \times (1-k) \leq k^n = e^{n \ln(k)}$$

Donc $N \geq \dfrac{\ln\left(d(x_0,x_1)\, \varepsilon\, (1-k)\right)}{\ln(k)}$

OK sur principe

Donc le plus petit nombre N d'itération suffisante pour assurer $|x_n - x^*| \leq \varepsilon$

est $N = \left\lfloor \dfrac{\ln\left(|x_0 - x_1|\, \varepsilon\, (1-k)\right)}{\ln(k)} \right\rfloor$

1,5

que fais-tu de ce ??

Approximation en fonction de ℓ

Exercice 4

1 Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ inversible par transformé de Fourier

On a donc $\mathcal{F}^*(\mathcal{F}(f)) = 2\pi f$

Donc $f(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(f)(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega$

Donc $W_g(f)(a,b) = \frac{1}{a} \int_{\mathbb{R}} g\left(\frac{t-b}{a}\right) f(t)\, dt$

$= \frac{1}{a} \int_{\mathbb{R}} g\left(\frac{t-b}{a}\right) \times \frac{1}{2\pi} \left(\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f)(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega \right) dt$

Or $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$ inversible par transformé de Fourier donc $\mathcal{F}(f) = F \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$

On applique Fubini ~~OK~~ Il [illegible] justifier (produit $\in L_1(\mathbb{R})$)

$W_g(f)(a,b) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f)(\omega) \left(\frac{1}{a} \int_{\mathbb{R}} g\left(\frac{t-b}{a}\right) e^{i\omega t}\, dt \right) d\omega$

tu as du + / Passage Forme

$= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f)(\omega)\, e^{i\omega b}\, \mathcal{F}(g^*)(\omega a)$

tu n'as pas le droit de le sortir

(changement ~~d'~~ [illegible] translation

2

$= \frac{e^{i\omega b}}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} F(\omega)\, G^*(\omega a)\, d\omega$

Terme constant

tu as $e^{i\omega t}$ → G^* (transformée inverse)

~~Or g est est valeur dans $\mathbb{R}$ donc $\bar{g} = g$~~

NON

Ainsi

$$\boxed{\frac{1}{a}\int_{\mathbb{R}} \bar{g}\left(\frac{t-b}{a}\right) f(t)\, dt = \frac{e^{i\omega b}}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} F(\omega)\, \overline{G(\omega a)}\, d\omega}$$

2

Si f vérifie

$$2\pi f = \int_{\mathbb{R}} e^{iwt} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{iws} f(s)\, ds \right) dw = \int_{\mathbb{R}} e(iwt) \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-iws} f(s)\, ds \right) dw$$

Alors $2\pi f = \mathcal{F}^*(\mathcal{F}(f)) = \mathcal{F}(\mathcal{F}^*(f))$

Donc f est inversible par transformé de Fourier et $f \in L^2(\mathbb{R})$

Donc d'après 1/ on a $W_g(f)(a,b) = \frac{e^{iwb}}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \overline{G}(wa) F(w)\, dw$

Donc $\frac{2\pi}{C_g} \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{iwb}}{2\pi R} \int_{\mathbb{R}} \overline{G}(wa) F(w)\, dw\; g\left(\frac{t-b}{a}\right) \frac{da\,db}{a^2}$

OK

Or $C_G = \int_{\mathbb{R}} \frac{|G(w)|^2}{|w|} = W_g(g)(1,0)$

0/5

$$\frac{C_g f}{2\pi} = \iint_{\mathbb{R}} \frac{e^{iwt} F(w)}{2\pi} \left|\frac{G(w)}{|w|^2}\right|^2 dw$$

.... ~ A continuer